



# Tomographie électrique: Développements Méthodologiques et Applications.

Marc Pessel

## ► To cite this version:

Marc Pessel. Tomographie électrique: Développements Méthodologiques et Applications.. Géo-physique [physics.geo-ph]. Université Rennes 1, 2000. Français. NNT: . tel-00675125

**HAL Id: tel-00675125**

**<https://theses.hal.science/tel-00675125>**

Submitted on 29 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**M. PESSEL**

ISSN 1240-1498

ISBN 2-905532-27-1

# **Tomographie Électrique: Développements Méthodologiques et Applications**

**MEMOIRES**

**2001**



**Géosciences**

**n° 98**

**Rennes**

**MEMOIRE DE GEOSCIENCES - RENNES**

**N° 98**

**Marc PESSEL**

**Tomographie Electrique : Développements  
Méthodologiques et Applications**

**Thèse de Doctorat de l' Université de Rennes  
soutenue le 27 Octobre 2000**

**Géosciences - Rennes  
UMR -CNRS 6118  
Université de Rennes I  
Campus de Beaulieu  
35042 - Rennes Cédex  
(France)**

**2001**





**ISSN : 1240-1498**

**ISBN : 2-905532-97-1**

**2000**

**GEOSCIENCES-RENNES  
UMR-CNRS 6118  
Université de Rennes I - Campus de Beaulieu  
F - 35042 - RENNES Cédex (France)**

**Marc PESSEL**

**Tomographie électrique : Développements  
Méthodologiques et Applications.**

**Mémoires de Géosciences Rennes, n° 98, 129 p.**



---

*À mes parents,  
à mon p'tit coeur,  
pour ma fille, Anna.*



## Les Mercis :

Introduction majeure d'une thèse, car certainement les lignes les plus lues, les remerciements sont au mémoire de thèse, ce que sont les piliers à un bar (A. Crave, 1995), et donc je ne dérogerais en aucune façon à cette tradition, qui de plus permet enfin de coucher par écrit les noms des personnes m'ayant aidées, suivies et soutenues tout au long de mon travail. Car comme le soulignait H.P. (H.P. Valero, 1997), le paradoxe d'une thèse réside également dans le fait qu'un seul nom apparaît sur la couverture alors que ce travail ne peut être que le résultat d'une coopération professionnelle et personnelle de nombreuses personnes.

En premier lieu, je remercie sincèrement Dominique Gibert, pour m'avoir encadré tout au long de ces années, et dont l'intérêt qu'il a su susciter pour la géophysique a commencé bien avant ces trois années de thèse. Sa bonne humeur, sa simplicité, son sens de la motivation et sa pédagogie sont en grande partie responsables de l'aboutissement de ce travail.

Je remercie également Jean Virieux et Pascal Tarits d'avoir accepté la laborieuse tâche de rapporter sur cette thèse. Ainsi que Marwan Charara et André Revil pour leur accord enthousiaste afin de participer au jury. Un grand merci à Matthias Holschneider pour sa présence dans le jury et le "*baby sitting*" à San Francisco.

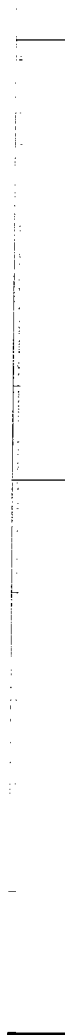
Mais une thèse, c'est aussi les copains et les copines ! D'abord les anciens camarades de jeu, absents du terrain mais toujours présents dans les tribunes : Pascalou, Totor, Dave, Bebert (n'oubliez pas les flamby !). Puis ceux que *je supporte* quotidiennement: Dim, Picard exilé rêvant de devenir Breton; Flo, allez raconte petite !?! ; Caro, je suis sûr qu'en changeant de chaussures tu serais moins angoissée, mais du coup tu parlerais moins; Steph, avec qui vas-tu parler de sport maintenant ? Rino, un peu extra-terrestre, longue vie à ton Nino ! Fred, à quand ta première truite ? Yves, pour les règles du rugby tu demanderas à Steph ! et (re)Fred, El Cravos, Riki, Laurie, J-M, Valérie et tous ceux qui ont des prénoms trop long pour que je les écrive !

Peut-on dire merci à ses parents ? Je ne pense pas, ça paraît dérisoire quand on pense à la somme de patience, de courage et d'amour dont ils ont dû faire preuve, sans y penser. Papa, maman, ce travail est pour vous car vous en êtes la cause et la raison.

Enfin, le(a) meilleur(e) pour la fin, que dire à celle qui a dit oui en toute connaissance de cause et qui recommencerait sans aucune hésitation, peut-être juste *gracias por el pasado, el presente y el futuro ...*

Le Pessel.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I. Méthodologie</b>	<b>7</b>
<b>1. Problème direct.</b>	<b>9</b>
1.1. Introduction.	9
1.2. Théorie et concepts.	9
1.3. Analyse numérique.	16
1.3.1. Introduction	16
1.3.2. Réseau de conductance.	17
1.3.3. Résolution numérique.	20
1.3.3.1. Introduction.	20
1.3.3.2. Les méthodes de relaxation	22
1.3.4. Les méthodes multigrilles.	27
1.3.4.1. Introduction.	27
1.3.4.2. Principe : exemple d'une méthode 2-grilles.	28
1.3.4.3. Opérateurs de lissage, de restriction et de prolongement.	30
1.3.4.4. L' algorithme " <i>Full Multigrid</i> ".	32
1.3.5. Calcul de la solution exacte.	34
1.3.6. Algorithme final.	35
1.4. Validation.	36
1.4.1. Validation dans un demi-espace homogène.	36
1.4.2. Validation de l'algorithme pour des milieux non homogènes.	40
1.4.2.1. Interface présentant un gradient positif pour les lignes de courant :	43
1.4.2.2. Interface présentant un gradient négatif pour les lignes de courant :	44
1.4.3. Évolution du potentiel secondaire.	46
1.5. Conclusion.	49

<b>2. Problème inverse.</b>	<b>52</b>
2.1. Introduction. . . . .	52
2.2. Recuit Simulé. . . . .	57
2.2.1. Principes. . . . .	57
2.2.2. Calcul de la fonction coût. . . . .	60
2.2.3. Décroissance de la température. . . . .	61
2.2.4. Perturbation des modèles. . . . .	63
2.3. Inversion multi-échelle. . . . .	65
2.3.1. Introduction. . . . .	65
2.3.2. Paramétrisation multi-échelle du modèle. . . . .	65
2.3.3. Initialisation par approximation linéaire. . . . .	68
2.3.4. Affinage de la grille. . . . .	70
2.4. L'algorithme d'inversion. . . . .	72
2.5. Tests synthétiques. . . . .	73
2.5.1. Exemples synthétiques simples. . . . .	73
2.5.2. Exemple synthétique en accord <i>a priori</i> avec les données de Pont-Péan. . . . .	77
2.5.3. Autres exemples. . . . .	80
2.6. Conclusion. . . . .	80
 <b>II. Application et Exemple de Terrain</b>	 <b>82</b>
<b>3. Les mines de Pont-Péan.</b>	<b>84</b>
3.1. Contexte géologique. . . . .	84
3.2. Acquisition des données. . . . .	85
3.3. Inversion . . . . .	90
3.3.1. Paramètres d'inversion. . . . .	90
3.3.2. Résultats d'inversion. . . . .	91
3.4. Potentiel spontané. . . . .	93
3.4.1. Introduction. . . . .	93
3.4.2. Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform : Application to self-potential profiles. . . . .	93
3.4.3. Comparaison Résistivité - Potentiel spontané. . . . .	99
3.5. Discussion. . . . .	100
3.6. Conclusion. . . . .	100
 <b>Conclusion &amp; perspectives</b>	 <b>103</b>
 <b>III. Annexes</b>	 <b>108</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>124</b>

# Table des figures

1.1.	Représentation schématique d'un modèle 3-D cylindrique. . . . .	13
1.2.	Comportement de la transformée de Fourier du potentiel électrique en fonction de la variable de Fourier (longueur d'onde duale de la dimension $y$ . (a) L'écartement des électrodes $l$ est de 1 mètre, la résistivité $\rho$ du milieu est de 100 $\Omega.m$ et la distance aux électrodes est 1 mètre. (b) L'écartement des électrodes $l$ est de 1 mètre, la résistivité $\rho$ du milieu est de 100 $\Omega.m$ et l'intensité du courant est 1 A. (c) La résistivité $\rho$ du milieu est de 100 $\Omega.m$ , l'intensité du courant est 1 A et la distance aux électrodes est 1 mètre. (d) L'écartement des électrodes $l$ est de 1 mètre, l'intensité du courant est 1 A et la distance aux électrodes est de 1 mètre. . . . .	14
1.3.	Modèle de terrain pour le problème de dirichlet $P(\Omega, \varphi, f)$ , $\Omega$ désigne un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ de bord $\Gamma$ . . . . .	16
1.4.	Portion d'un modèle 3-D cylindrique discrétisé. Les conductances verticales (SV), horizontales (SH) et de fuite (SF) (simulation de la direction infinie $y$ ) sont évaluées à partir des valeurs de conductivité des mailles adjacentes (d'après [Tripp et al., 1984]). . . . .	17
1.5.	Vitesse de convergence pour 4 méthodes de relaxation. La variation relative représente le plus grand écart enregistré entre deux itérations successives. La grille utilisée simule un terrain homogène de résistivité égale à 100 $\Omega.m$ , sa taille est de $N=100$ et les sources de courant sont situées au centre, avec un écartement de 20 m. (a) Equilibre obtenu par relaxation de Jacoby. (b) Equilibre obtenu par relaxation de Gauss-Seidel. (c) Equilibre obtenu par surrelaxation successive. (d) Equilibre obtenu par surrelaxation cyclique de Chebychev (N.B. : les échelles des axes ne sont pas identiques). . . . .	23
1.6.	Schéma simple du principe d'une correction par grille grossière, méthode à la base des résolutions multigrilles complètes. . . . .	27
1.7.	Structure de différents cycles multigrilles. L indique une opération de lissage et E le calcul de la solution exacte sur la grille la plus grossière. Chaque ligne descendante \ indique une restriction ( $R$ ) vers la grille grossière tandis que chaque ligne montante / signifie un prolongement ( $P$ ) vers la grille fine. La grille la plus fine est en haut de chaque diagramme. . . . .	31
1.8.	Structure des cycles pour la méthode "full multigrid" (FMG). Cette méthode commence sur le niveau le plus grossier, puis affine la solution vers des grilles plus fines par interpolation et lissage. . . . .	33
1.9.	Représentation complète de l'algorithme utilisé pour la résolution du problème direct en $2-D^{1/2}$ . vec : $\lambda$ : longueur d'onde duale de la dimension $y$ , $l$ : niveau de la grille, $l_{max}$ : niveau de la grille la plus fine, $u$ : potentiel électrique et $f$ : second membre. . . . .	36

1.10. (a) Champ de potentiel 2D généré par un dipôle, solution analytique. (b) Champ de potentiel 2D généré par un dipôle, solution numérique. (c) Différence entre les graphes en %(a) et (b). (d) Superposition des graphes (a) et (b). . . . .	37
1.11. Distribution du potentiel électrique, correspondant à des profils réalisés à différentes profondeurs de la figure (1.10). La courbe en trait plein représente le potentiel électrique bi-dimensionnel obtenu analytiquement, la courbe en pointillé montre le potentiel électrique obtenu numériquement sur une grille de dimension 32×32 et les cercles, le potentiel électrique sur une grille 64×64. (a) Profil à 1m de profondeur, (b) profil à 2 m, (c) profil à 5 m et (d) profil à 10 m. . . . .	38
1.12. Exemple de grille de modélisation utilisée lors de la résolution du problème direct. L'extension de la grille (zone blanche) permet de s'affranchir des effets de bords. Le modèle de résistivité est représenté par la zone grisée. . . . .	39
1.13. (a) Champ de potentiel 3-D généré par un dipôle, solution analytique. (b) Champ de potentiel 3-D généré par un dipôle, solution numérique en $2-D^1/2$ . (c) Différence entre les graphes en %(a) et (b). (d) Superposition des graphes (a) et (b). . . . .	40
1.14. Modèle de terrain consistant en deux compartiments de résistivité différentes séparées par une faille verticale. Le courant est injecté par un simple point source A à une distance d de la faille. A' étant l'image de A. L'origine du repère cartésien est placé en A. . . . .	41
1.15. (a) Champ de potentiel 3-D généré par un point source près d'un plan séparant deux régions de résistivités différentes, solution analytique. Le compartiment haut possède une résistivité élevée (10 000 $\Omega.m$ ), celui du bas à une résistivité de 100 $\Omega.m$ . (b) Idem (a) pour la solution numérique en $2-D^1/2$ . (c) Différence entre les graphes en %(a) et (b). (d) Superposition des graphes (a) et (b). . . . .	42
1.16. Distribution du potentiel électrique, correspondant à des profils réalisés à différentes profondeurs de la figure (1.15). La courbe en trait plein représente le potentiel électrique tri-dimensionnel obtenu analytiquement, la courbe en pointillé montre le potentiel obtenu numériquement sur une grille de dimension 32×32. (a) Profil à 1m de profondeur, (b) profil à 2 m, (c) profil à 5 m et (d) profil à 10 m. . . . .	43
1.17. (a) Champ de potentiel 3-D généré par un point source près d'un plan séparant deux régions de résistivités différentes, solution analytique. Le compartiment haut possède une faible résistivité (0.01 $\Omega.m$ ), celui du bas à une résistivité de 100 $\Omega.m$ . (b) Idem (a) pour la solution numérique en $2-D^1/2$ . (c) Différence entre les graphes (a) et (b). (d) Superposition des graphes (a) et (b). . . . .	44
1.18. Distribution du potentiel électrique, correspondant à des profils réalisés à différentes profondeurs de la figure (1.17). La courbe en trait plein représente le potentiel électrique tri-dimensionnel obtenu analytiquement, la courbe en pointillé montre le potentiel obtenu numériquement sur une grille de dimension 32×32. (a) Profil à 1m de profondeur, (b) profil à 2 m, (c) profil à 5 m et (d) profil à 10 m. Les graphes (a'), (b'), (c') et (d') sont réciproquement identiques aux graphes (a), (b), (c) et (d) mais avec une échelle logarithmique pour l'axe y. . . . .	45



1.19. (a) Modèle de resistivité, avec 3 blocs encastrés. Le milieu ambiant est de $1 \Omega.m$ , et les 3 blocs possèdent respectivement une résistivité de $1,5 \Omega.m$ , $100 \Omega.m$ et $0.7 \Omega.m$ . (b) Champ de potentiel électrique pour un positionnement des électrodes identiques à la figure (a) mais dans le cas d'une milieu de résistivité homogène de $1 \Omega.m$ , ce champ représente le potentiel électrique primaire. . . . .	46
1.20. Potentiel secondaire pour les différents niveaux de grilles. De la grille (a) vers la grille (f), la dimension varie de $4 \times 4$ à $256 \times 256$ . . . . .	47
1.21. (a) Vecteur densité de courant pour le modèle de résistivité présenté sur la figure 1.19a. (b) Zoom sur la zone des 3 objets encastrés. . . . .	48
1.22. (a) Potentiel secondaire d'un modèle de résistivité identique à la figure 1.20a, mais avec seulement le plus gros bloc. (b) Idem (a) mais avec 2 blocs. (c) Idem (a) mais avec seulement le plus petit bloc. (d) Potentiel secondaire d'un modèle de résistivité ne possédant qu'un bloc au centre et dont les électrodes sont situés au centre des parties supérieures et inférieures. . . . .	51
2.1. La définition traditionnelle du problème direct et inverse vis-à-vis de l'espace des modèles et des données. . . . .	53
2.2. Schéma des interactions entre les différents paramètres. . . . .	55
2.3. Représentation d'un fonction coût hypothétique. Les points A et D sont des minima locaux, lieu où certaines méthodes inverses peuvent rester bloquées lors de la recherche du modèle de coût minimal. Au point C, les dérivées d'ordre élevées peuvent être nulles, ce qui peut poser d'importants problèmes à certains algorithmes (par. ex. méthodes de gradient). Le point B est le minimum absolu. . . . .	58
2.4. (a) Exemple schématique d'une fonction coût avec un minimum global à $m=3$ et un minimum local à $m=7$ . (b-d) Forme de la densité de probabilité pour la fonction coût (a) à différentes températures : (b) $T=\infty$ , (c) $T=1$ , (d) $T=0.2$ et (e) $T=0.02$ . En commençant à $T=\infty$ et en décroissant lentement la température, si on génère aléatoirement des valeurs de $m$ en respectant la densité de probabilité correspondant à la température courante, on converge vers une valeur de $m=3$ . (d'après Tarantola, 1987) . . . . .	59
2.5. Représentation de la décroissance de la température. L'allure de la courbe est fonction du paramètre $\lambda$ de l'équation (2.10). . . . .	62
2.6. Schéma décrivant le principe de la recherche géométrique de la solution de la descente du simplexe. Le modèle recherché est constitué de 2 paramètres, le simplexe étant alors constitué par 3 points (représentant 3 modèles à 2 paramètres) : M1, M2 et M3. La fonction coût représentée est très simple et possède un minimum. La première opération géométrique effectuée (notée 1) est une réflexion par rapport au deux modèles de plus faible coût. La seconde opération est une expansion du point de plus faible coût (M1), puis ensuite une seconde réflexion permet d'obtenir un nouveau modèle (M2). L'encart en haut à gauche montre les différentes opérations géométriques réalisables. . . . .	64
2.7. Exemple d'une paramétrisation évolutive optimale. (a-e) evolution de la paramétrisation du modèle. (f) Modèle de résistivité de référence. . . . .	67

2.8. Représentation schématique de la procédure d'affinage. Le bloc est subdivisé en quatre blocs de taille identique, puis après l'affectation à chaque bloc de la valeur de résistivité du bloc mère, une approximation linéaire permet alors d'estimer la variation de résistivité à affecter à chaque blocs fils. . . . .	68
2.9. Schéma de l'algorithme complet du processus d'inversion. $T_i$ : température initiale, $T_f$ : température finale, $T$ : température courante. . . . .	72
2.10. Exemple d'inversion multi-échelle. (a) Modèle synthétique. (b) Sensibilité : 4 blocs. (c) Sensibilité : 10 blocs. (d) Modèle inverse : 1 bloc. (e) Modèle inverse : 4 blocs. (f) Modèle inverse : 10 blocs. . . . .	74
2.11. (a) Evolution du coût du modèle inverse en fonction de la température. La courbe du haut montre cette évolution pour le modèle inverse à 4 blocs, celle du bas pour le modèle inverse à 10 blocs. (b) Evolution du coût du modèle en continu. . . . .	75
2.12. Exemple d'inversion multi-échelle reprenant le même exemple synthétique que (2.10) mais avec un dispositif d'acquisition différent. Les électrodes ne sont situées que sur un bord, celui du haut. (a) Modèle inverse homogène : 1 bloc. (b) Modèle inverse : 4 blocs. (c) Modèle inverse : 10 blocs. (d) Evolution du coût du modèle en fonction de la température. (e) Evolution du coût pendant la totalité du processus d'inversion. . . . .	76
2.13. Exemple d'inversion. (a) Modèle synthétique. (b) Modèle inverse final : 16 blocs. (c) Evolution du coût du modèle en fonction de la température. (d) Evolution du coût du modèle au cours du processus complet de l'inversion. . . . .	77
2.14. Résultats d'inversion. Modèle synthétique en haut à gauche. (a) Modèle inverse à 4 blocs. (b) Modèle inverse à 13 blocs. (c) Modèle inverse à 25 blocs. (d) Modèle inverse final à 67 blocs. . . . .	78
2.15. (a) Evolution du coût du modèle en fonction de la température. (b) Evolution du coût du modèle lors du processus complet d'inversion. . . . .	78
2.16. Exemple d'inversion. (a) Modèle synthétique. (b) Modèle inverse : 4 blocs. (c) Modèle inverse : 16 blocs. (d) Modèle inverse : 46 blocs. (e) Evolution du coût du modèle en fonction de la température. (f) Evolution du coût du modèle au cours du processus d'inversion. . . . .	80
3.1. Schéma géologique simplifié du secteur de Pont-Péan. . . . .	85
3.2. Exemples de différents dispositifs d'acquisition de données électriques. A et B représentent les électrodes de courant et M et N les électrodes de potentiel. . . . .	86
3.3. (a) Dispositif multi-électrodes (b) ABEM Lund SAS400 : ampèremètre, voltmètre. . . . .	87
3.4. Trois séries de mesures de potentiel électriques obtenues avec trois dispositifs différents : wenner, dipôle-pôle et pôle-pôle. Les graphes de la partie supérieure donnent les données brutes et les graphes de la partie inférieure l'erreur en pourcentage (max. 1%, car seuil fixé lors de l'acquisition). . . . .	88
3.5. (a) Pseudo-section issue du profil Wenner. (b) Pseudo-section issue du profil Pôle-Dipôle. . . . .	89
3.6. Topologie de la grille de résistivité utilisée lors de l'inversion. La dimension des mailles selon $x$ (distance au sol) est régulière et égale à 5 mètres, selon la profondeur elle varie de 1 à 7,5 mètres. . . . .	90

3.7.	Modèles de résistivité obtenus lors de l'inversion des données de Pont-Péan. a) Section finale obtenue sur la grille la plus grossière : 4×2 blocs. b) Section finale obtenue sur une grille plus fine 8×4 correspondant à une division de tous les blocs de la grille précédente. c) Section finale obtenue sur une grille partiellement rééchantionnée et possédant 80 blocs. d) Section (c) avec une interprétation géologique. A l'Est, un remplissage sédimentaire, à l'Ouest deux niveaux de schistes (très altérés et sains ou peu altérés), au centre une zone fortement faillée permettant une importante circulation d'eau. . . . .	92
3.8.	Résultat final d'inversion de résistivité et analyse en ondelettes continue de données de potentiel spontané. Les échelles horizontales sont équivalentes, ce qui permet une comparaison directe de la localisation de la faille avec les deux méthodes. . . . .	99
3.9.	Comparaison de résultats d'inversion. Les deux images supérieures sont le résultat d'une inversion 1-D de Zhody. Les deux images du centre sont issues d'une inversion 2-D par le logiciel Res2Dinv basée sur un algorithme de Marquardt-Levenberg. L'image du bas est le résultat de notre inversion multi-échelle. ( <i>Les échelles verticales ne sont identiques</i> ). .	102

# Liste des tableaux

1.1.	Nombre d'opérations élémentaires totales pour différentes méthodes de résolution.	26
.1.	Ordres de grandeurs des paramètres électromagnétiques pour divers matériaux. (Compilation de [Saintenoy, 1998]) . . . . .	110

## Résumé.

La tomographie électrique est une méthode géophysique permettant d'obtenir la répartition de la conductivité des roches à partir de mesures de potentiel électrique. Une large partie de cette thèse est constituée d'un développement méthodologique concernant l'interprétation des données électriques. L'interprétation des données se décompose en deux problèmes : le problème direct et le problème inverse. Le problème direct permet d'obtenir le champ de potentiel électrique en fonction de la distribution de conductivité. Il permet donc de *tester* les modèles de conductivité fournis par le problème inverse qui explorent l'espace des solutions afin de converger vers le *meilleur* modèle.

Le problème direct est résolu numériquement *via* une méthode multigrille qui permet de résoudre rapidement de larges systèmes linéaires. Une paramétrisation multi-échelle et adaptative est utilisée pour la résolution du problème inverse. Cette paramétrisation évolue pendant le processus d'inversion afin d'aboutir à une paramétrisation optimale. Ceci rend le problème fortement non-linéaire et donc seules des méthodes inverses pleinement non-linéaires comme le recuit simulé sont envisageables. Le couplage du recuit simulé et de la descente du simplexe permet d'obtenir une méthode inverse hybride. Les tests synthétiques ont permis de montrer l'intérêt d'une paramétrisation multi-échelle adaptative. Effectivement lorsque cette paramétrisation devient optimale pour le modèle considéré, la décroissance de la fonction coût est relativement brutale, l'inversion converge alors rapidement vers le *meilleur* modèle.

L'interprétation de données électriques réelles a été réalisée sur un terrain relativement simple et bien documenté. La distribution de résistivité obtenue a été comparée avec les résultats d'une analyse en ondelettes continue et des données de carottage. On a alors abouti à une bonne cohérence entre les différentes sources d'informations, permettant de valider la méthode inverse.

## Abstract.

Electrical tomography is a geophysical method making it possible to obtain the conductivity distribution of the rocks starting from measurements of electrical potential. A broad part of this thesis makes up of a methodological development concerning interpretation of the electrical data. The interpretation of the data breaks up into two problems : the forward problem and the inverse problem. The forward problem makes it possible to obtain the field of electrical potential according to the conductivity distribution. It thus makes it possible to test the models of conductivity provided by the inverse problem which explore the space of the solutions in order to converge towards the best model.

The forward problem is solved numerically by a multigrid algorithm which makes it possible to solve quickly large linear systems. A parameterization multi-scale and adaptive is used for the resolution of the inverse problem. This parameterization evolves during the process of inversion in order to lead to an optimal parameterization. This makes the problem strongly non-linear and thus only of the fully non-linear inverse methods like simulated annealing are possible. The coupling of simulated annealing and the simplexe descent makes it possible to obtain a hybrid inverse method. The synthetic tests made it possible to show the interest of a parameterization adaptive multi-scale. Indeed when this parameterization becomes optimal for the considered model, the decrease of the cost function is relatively rough, the inversion converges then quickly towards the best model.

The interpretation of real electrical data have realized on a relatively simple ground and documented well. The resistivity distribution obtained was compared with the results of analysis of continuous wavelets transform and data of coring. One then led to a good coherence between the various sources of information, allowing to validate the inverse method.





# Introduction



# Introduction.

Le but des méthodes de prospections électriques est de fournir une image du sous-sol de la Terre en fonction de ses propriétés électriques. On peut remarquer que les géologues, au sens large, ne conçoivent pas la subsurface comme une image visuelle où les roches seraient directement visibles, mais plutôt comme une représentation de certaines caractéristiques des roches. Ainsi, une image mentale de la Terre est créée en associant diverses caractéristiques définissant une roche : les propriétés minéralogiques, texturales, paléontologiques, etc. . . Les géophysiciens utilisent des paramètres physiques tels que la densité, la vitesse des ondes longitudinales et transversales, la conductivité, etc. . . Les images obtenues sont alors la somme de plusieurs informations sur les caractéristiques du sous-sol, dont la richesse est souvent plus importante qu'une image visuelle de la roche. Dans cette étude, nous nous intéresserons uniquement à une seule propriété des roches : la conductivité (ou son inverse la résistivité). Ainsi, il est important de se rappeler que les images que nous obtiendrons ne sont pas de "*vraies*" images du sous-sol mais seulement celles qui satisfont notre intérêt scientifique personnel.

La conductivité des roches n'est pas de la même nature que celle des métaux. La circulation du courant électrique dans les métaux est due aux déplacements de charges électriques portées par les électrons (conductivité électronique), alors que dans les roches, ce sont les ions contenus dans l'eau interstitielle qui transportent les charges électriques (conductivité ionique). Certains minéraux possèdent également une conductivité électronique, comme la pyrite, la galène, la magnétite . . . La résistivité des roches varient dans une gamme très étendue (cf. tableau en annexe), de quelques dixièmes d'Ohm.m pour l'eau de mer à plusieurs dizaines de milliers d'Ohm.m pour les roches cristallines massives (non-fracturées). Cependant, la relation entre un faciès géologique type et la résistivité est très grossière. Ainsi il reste très difficile de déterminer le type de roche en fonction des valeurs de résistivité estimées. Néanmoins, pour une même formation géologique, la résistivité reste relativement constante et donc si on connaissait précisément la distribution de la résistivité dans le sous-sol, on connaîtrait correctement sa structure géologique.

On peut définir deux étapes principales pour l'exploration géoélectrique :

- Nous devons développer et utiliser des techniques qui permettent d'obtenir des images géoélectriques du sous-sol ayant les meilleurs résolution, fiabilité et précision possible.
- Nous devons être capable de transformer les images obtenues pour qu'elles aient un sens pour d'autres personnes.

Le deuxième point rejoint le fait que la résistivité reste constante pour une formation géologique donnée et donc permet d'associer la distribution de résistivité à la structure du

sous-sol. Le premier point concerne l'interprétation des données électriques.

Malgré l'intérêt des méthodes de prospections électriques dans de nombreux domaines : exploration minière, études géotechniques et environnementales, l'interprétation des données électriques est restée longtemps qualitative ou basée sur des hypothèses très simplificatrices (par ex. géométrie 1-D). Cependant, les différents domaines intéressés par l'exploration géoélectrique, et notamment les études environnementales, sont demandeurs de techniques de prospection permettant d'obtenir des images de bonne résolution de la subsurface. Effectivement, la cartographie de la structure du sous-sol (failles, fractures, niveau argileux, arène ...) est devenue une préoccupation majeure dans des endroits à risques : décharges, stockage des produits pétroliers et chimiques ou des déchets nucléaires. De plus, les besoins ont considérablement évolués puisque les images doivent également permettre, par exemple, un suivi du transfert de polluants vers la nappe phréatique ou, plus généralement, une visualisation de la diffusion des fluides dans le sous-sol. En fait, cette évolution impose de considérer l'aspect spatio-temporelle du milieu et donc des images qui le décrivent.

Les systèmes d'acquisitions multi-électrodes permettent maintenant d'obtenir des mesures électriques de bonne qualité avec une couverture relativement dense ([Asch and Morrison, 1989]). Ceci, en sus de l'augmentation rapide de la puissance des ordinateurs, permet d'envisager des techniques d'interprétation des données électriques de plus en plus sophistiquées. Ainsi la tomographie électrique est utilisée, presque en routine, en hydrologie ([Bevc and Morrison, 1991]; [Daily et al., 1992]; [Park, 1998]; [Halgrey and Michaelson, 1999]; [Nowroosi et al., 1999]), pour des problèmes de pollution ([Van et al., 1991]; [Benson et al., 1997]; [Daily and Ramirez, 2000]), parfois associée à des expériences de vitrification *in situ* ([Spies and Ellis, 1995]) permettant de stopper la progression d'une nappe de polluants ou à de la surveillance de site ([Ramirez et al., 1993]). Toutes ces applications ne sont possibles que s'il existe des méthodes d'interprétation des données géoélectriques, c'est-à-dire des méthodes permettant de fournir une distribution de la conductivité à partir des mesures de potentiel électrique.

Les méthodes d'interprétation par essai-erreur ont souvent été employées pour interpréter les données de résistivité en termes de structures géologiques ([Mufti, 1976]; [Dey and Morrison, 1979]; [Griffiths and Barker, 1993]). L'inversion consiste alors à comparer visuellement les données réelles et les données théoriques puis à ajuster les paramètres. Ces méthodes sont relativement lourdes à utiliser et dépendent fortement de l'habileté de l'utilisateur, ainsi elles ont été remplacées par des techniques d'inversion automatiques et itératives.

Les premières méthodes itératives développées utilisaient des modèles à géométrie 2-D pré-déterminée, l'inversion ne consistant alors qu'à ajuster les valeurs de résistivité ([Tripp et al., 1984]). Cet ajustement étant réalisé par des méthodes d'inversion itératives et linéaires, dérivées des méthodes d'optimisation de Gauss-Newton. Divers aspects de l'interprétation des données électriques ont permis d'affiner ces méthodes, comme la prise en compte de la topographie en utilisant une formulation en éléments finis ([Tong and Yang, 1990]), la modélisation du problème direct ([Stefanescu, 1987]; [Shima, 1990]; [Zhao and Yedlin; M.J., 1996]), la paramétrisation du modèle de résistivité ([Narayan et al., 1994]). Ces méthodes possèdent une limitation importante. Effectivement



## INTRODUCTION.

---

elles requièrent toutes un bon modèle initial, c'est-à-dire qu'il n'est pas certain qu'elles obtiendront le "meilleur" modèle final si le modèle initial est trop éloigné de la solution.

Il est reconnu depuis longtemps que l'inversion de données de résistivité électrique est un problème non-linéaire ; ainsi les efforts pour interpréter les profils de résistivité se sont tournés vers des méthodes comme le recuit simulé. Cependant, les temps de calculs sont extrêmement importants, souvent liés à une paramétrisation inadéquate ou à un parcours séquentiel des valeurs de résistivité ([Sen et al., 1993]). Chunduru et al. (1995) comparent divers algorithmes d'inversion non-linéaires (recuit simulé, VFSA (*Very Fast Simulated Annealing*) algorithmes génétiques, etc...) sur des données de profil de résistivité pour des objets 2-D à géométrie fixée. Ils trouvent que l'algorithme VFSA possède les meilleures performances en termes de temps de calcul, cet algorithme est équivalent à un algorithme de recuit simulé, mais dont chaque nouveau modèle est obtenu *via* une distribution de Cauchy, au lieu d'une loi uniforme pour le recuit simulé strict.

Il est à noter qu'une approche originale ([Oldenburg and Ellis, 1991]) basée sur la définition d'une fonction permettant de "*passer*" directement de l'espace des données vers l'espace des solutions (*Approximate Inverse Mapping*), obtient des résultats intéressants. Cette approche a été développée afin de traiter des problèmes possédant un grand nombre de paramètres et de données.

Les différents travaux développés précédemment effectuent soit une régularisation du problème, soit paramétrisent les modèles afin de les simplifier, mais en gelant alors la géométrie du modèle de conductivité. En fait, ceci revient dans la majorité des cas à avoir une bonne connaissance *a priori* de la structure géologique du terrain étudié. Même si souvent les méthodes de prospection géoélectriques ne sont pas employées seules, et donc peuvent utiliser des informations fournies par d'autres techniques de prospection (forage, sismique, etc...), les informations *a priori* peuvent induire à des interprétations incorrectes en restreignant excessivement l'espace des solutions. Ainsi, nous avons décidé d'implémenter une méthode pleinement non-linéaire permettant d'obtenir une solution même si aucune information *a priori* est connue : le recuit simulé. Cette méthode d'inversion requière la résolution d'un nombre important de problèmes directs, il est donc nécessaire de résoudre rapidement ce problème. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à étudier de manière approfondie le problème direct. De plus, afin de réduire le nombre de paramètres décrivant le modèle de conductivité, nous avons adopté une paramétrisation multi-échelle. Cependant, dans le but de ne pas d'aboutir à un modèle possédant une structure figée et inadéquate pour décrire correctement le milieu étudié, cette paramétrisation est adaptative et évolue au cours du processus d'inversion.

Cette thèse se décompose en trois chapitres, les deux premiers développent la méthodologie employée pour interpréter les données de résistivité électrique, le troisième chapitre présente l'application de cette méthode à une étude de terrain : Les Mines de Pont-Péan. La méthodologie s'articule en deux chapitres : l'un traitant du problème direct et l'autre du problème inverse. Le problème direct est résolu numériquement *via* une méthode multigrille, dont l'intérêt est de posséder une convergence indépendante de la dimension de la grille utilisée. L'inversion est basée sur une approche pleinement non-linéaire : le recuit simulé, à laquelle est associée une paramétrisation multi-échelle adaptative, permettant

d'affiner les modèles de distribution de conductivité au cours du processus d'inversion. L'inversion est testée sur des modèles synthétiques, puis dans le troisième chapitre sur des données réelles.

# Première partie .

## Méthodologie



# 1. Problème direct.

## 1.1. Introduction.

La première partie de ce chapitre développe les équations de Maxwell et de Poisson afin d'aboutir à la formulation mathématique à résoudre numériquement. En effet, dans l'optique de réduire les temps de calculs tout en respectant une hypothèse tri-dimensionnelle, notre algorithme de résolution du problème direct suppose une invariance selon une direction. Cette hypothèse, *a priori* forte peut être prise en compte lors de l'acquisition des données sur le site étudié, où il est souvent possible de disposer les électrodes de manière adéquate avec cette hypothèse pour minimiser l'erreur commise. Mais l'avantage majeur de cette hypothèse réside dans l'analogie que présente alors les équations avec la théorie de transmission de surface ([Madden and Swift, 1969] ; [Swift, 1971]). Effectivement cette particularité permet alors, après une discrétisation en réseau de résistances (ou de conductances) de la distribution de résistivité, une formulation du problème en un système d'équations linéaires très proche de celui obtenu par une formulation en différences finies, et en possédant les principales propriétés (matrice creuse et structure bande)

## 1.2. Théorie et concepts.

Tous les phénomènes électromagnétiques sont régis par les équations de Maxwell. En fait, ces équations sont basées sur quatre lois physiques que doivent respecter les champs électromagnétiques :

- un flux de courant électrique génère un champ magnétique (équation 1.1),
- lorsqu'un champ magnétique varie dans le temps, alors un champ électrique lui est associé (équation 1.2),
- le flux électrique (courant) est conservé (équation 1.3),
- et le flux magnétique est également conservé (équation 1.4).

Ces lois, gouvernant le caractère des champs électromagnétiques dans un milieu conducteur inhomogène sont :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\mathbf{H}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{j}}, \quad (1.1)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = q, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.4)$$

Ici  $\vec{H}$  est le champ magnétique ( $A.m^{-1}$ ),  $\vec{D}$  le déplacement électrique ( $A.s.m^{-2}$ ),  $\vec{B}$  l'induction magnétique (tesla) et  $\vec{E}$  le champ électrique (volt/m) ;  $q$  est la densité de charge électrique (Coulomb) et  $\vec{j}$  le vecteur densité de courant ( $A.m^{-2}$ ). Ces quatre équations sont complétées par les équations constitutives qui dépendent des propriétés de la matière :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (1.6)$$

où  $\epsilon$  et  $\mu$  sont respectivement les perméabilités diélectrique (fahrad/m) et magnétique (henri/m). Enfin, expérimentalement, il a été observé que la densité de courant dans un milieu étendu est linéairement proportionnelle au champ électrique. Cette relation est connue sous le nom de loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.7)$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique (siemens/m) du milieu dont l'inverse  $\rho = 1/\sigma$ , est la résistivité électrique (Ohm.m). Le tableau (.1) en annexe présente les ordres de grandeurs pour ces trois paramètres électromagnétiques dans divers matériaux. Puisque aussi bien le champ électrique  $\vec{E}$  que la densité de courant  $\vec{j}$  sont des vecteurs, la quantité  $\sigma$  doit être un tenseur de rang 3, en coordonnées cartésiennes, et donc à 9 composantes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Ceci est également vrai pour les perméabilités diélectrique et magnétique. Si les axes des coordonnées sont sélectionnés dans la direction de la conductivité maximale et minimale, seul les termes diagonaux sont non nuls, donnant ainsi un tenseur à 3 valeurs. Dans le cas des matériaux isotropes ces trois termes sont égaux et la conductivité devient un scalaire. En effet dans un matériau isotrope les vecteurs champ électrique et densité de courant sont colinéaires, c'est-à-dire que le flux de courant est dans le sens du champ électrique appliqué. L'anisotropie des minéraux et des roches est un phénomène assez courant, ainsi dans certains cas, il est nécessaire de prendre en compte cette caractéristique de la conductivité pour les modélisations.

Cependant, tout en restant à une échelle supérieure à celle de la taille du minéral il est alors possible de considérer que la conductivité est un scalaire. Cette hypothèse peut être fortement remise en question dans certains contextes géologiques, par exemple en présence de grandes failles permettant la circulation de fluides ou de structures tabulaires

fortement marquées (alternances d'argiles et sables par ex.) où une anisotropie de structure peut se rencontrer. Mais, dans ce cas, également, il est possible de contourner ce problème en utilisant une grille suffisamment fine pour ne pas intégrer des terrains trop différents et pouvoir utiliser une valeur scalaire pour la conductivité du matériau. De plus [Kohn and MacKenney, 1990] ont montré que l'utilisation d'un tenseur pour représenter la conductivité s'accompagnait de gros problèmes lors de l'inversion des données, notamment en faisant diverger la solution.

Une autre caractéristique couramment admise est la linéarité de la conductivité des matériaux terrestres. La loi d'Ohm n'impose en aucune façon cette propriété, et donc la conductivité pourrait parfaitement dépendre du champ électrique et/ou de la densité de courant. Ce phénomène rendrait alors les mesures et les comparaisons extrêmement délicates à opérer. Cependant les matériaux terrestres possèdent pour la plupart cette propriété, l'exemple courant dérogeant à la règle étant l'air, qui devient conducteur quand le champ électrique excède une certaine valeur (par. ex. : les éclairs).

Les techniques de prospection auxquelles nous nous intéressons entrent dans la catégorie des méthodes à courant continu (sondage électrique, panneau de résistivité, tomographie électrique, cartographie électrique, polarisation induite...); dans ce cas d'étude le régime est supposé stationnaire. En fait, l'hypothèse réalisée suppose que les variations de courant sont suffisamment lentes pour ne pas être mesurables et, qu'ainsi, nous soyons en présence de champ permanent et stationnaire. Cette hypothèse permet de simplifier considérablement les équations de Maxwell car les termes dépendants d'une variation temporelle des équations 1.1 et 1.2 disparaissent :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}, \quad (1.9)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0. \quad (1.10)$$

Dans leur forme complète les équations de Maxwell couplent le champ électrique et le champ magnétique, or ce couplage est beaucoup moins nette dans la forme statique des équations de Maxwell (cf. eq. (1.9) et (1.10)). Un champ électrique crée des courants d'induction (courants "*galvaniques*"), lesquels sont accompagnés par un champ magnétique, cependant ce champ magnétique n'a pas d'effet appréciable sur le champ électrique ([Zhdanov and Keller, 1994]). Ainsi il est courant de les négliger lors des études d'injection de courant continu dans le sous-sol. Donc, si l'on a pas de courant d'induction, dans le cas de milieux peu conducteurs, les équations de Maxwell se séparent en deux séries d'équations permettant de traiter simultanément, mais indépendamment, les champs électrostatiques et les champs magnétostatiques.

Nous allons restreindre notre étude aux champs électrostatiques, ainsi nous n'aurons besoin que des équations suivantes extraites des lois précédentes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0, \quad (1.11)$$

$$\text{div} \vec{D} = q, \quad (1.12)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}. \quad (1.13)$$

L'équation (1.11) montre que le champ électrique  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel scalaire défini par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi(x, y, z), \quad (1.14)$$

où  $\phi(x, y, z)$  est le potentiel électrique en coordonnées cartésiennes. En utilisant la loi d'Ohm (eq. 1.7) on obtient directement :

$$\vec{\nabla} \phi(x, y, z) = -\rho(x, y, z) \vec{j}(x, y, z). \quad (1.15)$$

On sait également que dans un milieu isotrope mais hétérogène et en présence d'une source de courant le vecteur densité de courant peut s'écrire :

$$\nabla \cdot \vec{j}(x, y, z) = I_s(x, y, z), \quad (1.16)$$

La combinaison des relations (1.15) et (1.16) permet d'obtenir l'équation de Poisson :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(x, y, z)} \cdot (\vec{\nabla} \phi(x, y, z)) \right) = -I_s(x, y, z). \quad (1.17)$$

Le problème fondamental en électrostatique est donc de connaître le champ de potentiel électrique  $\phi(x, y, z)$  en tout point de l'espace. En effet, la connaissance de la répartition du potentiel électrique nous permet alors de décrire parfaitement le phénomène physique d'injection de courant électrique dans le sous-sol. Pour déterminer ce potentiel, qui doit vérifier l'équation de Poisson, nous allons faire une première hypothèse, puis réécrire l'équation dans le domaine de Fourier.

Supposant l'existence d'une direction infinie, soit une invariance par translation suivant les  $y$  par exemple, la distribution de la résistivité ne dépend alors que de deux directions  $x$  et  $z$ . Cette hypothèse permet de conserver un champ de potentiel électrique et une source tri-dimensionnels. En effet, une électrode (assimilée à un point source) induit un champ électrique tri-dimensionnel. Le problème direct est donc résolu comme un modèle en 3-D cylindrique (2-D1/2) (fig. (1.1)). L'équation de Poisson se réécrit alors :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho(x, z)} \cdot (\vec{\nabla} \phi(x, y, z)) \right) = -I_s(x, z) \delta(y), \quad (1.18)$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac.

L'objectif est donc de connaître le potentiel électrique  $\phi(x, y = 0, z)$ . Pour obtenir ce potentiel électrique en  $y = 0$  nous allons définir l'équation (1.18) dans l'espace de Fourier ([Madden, 1971]; [Pelton et al., 1978]; [Tripp et al., 1984]). Les termes de l'équation sont calculés en utilisant la transformation de Fourier, selon la direction infinie  $y$ .

Le développement de l'équation 1.15 en considérant un milieu bi-dimensionnel et une source tri-dimensionnelle donne :



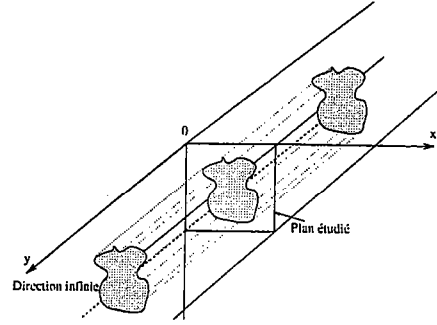


FIG. 1.1. – Représentation schématique d'un modèle 3-D cylindrique.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho(x,z) \cdot j_x \\ -\rho(x,z) \cdot j_y \\ -\rho(x,z) \cdot j_z \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

En calculant les transformées de Fourier selon  $y$  et en utilisant sa propriété de dérivation, l'équation (1.19) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\phi}(x,u_y,z)}{\partial x} \\ (2i\pi u_y) \tilde{\phi}(x,u_y,z) \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(x,u_y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho(x,z) \cdot \tilde{j}_x \\ -\rho(x,z) \cdot \tilde{j}_y \\ -\rho(x,z) \cdot \tilde{j}_z \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

où  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\mathbf{j}}$  sont respectivement le potentiel électrique et le vecteur densité de courant dans le domaine de Fourier. En utilisant le développement précédent de (1.15) en transformée de Fourier, l'équation (1.16) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho(x,z)} \cdot \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(x,u_y,z)}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(x,z)} \cdot \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(x,u_y,z)}{\partial z} \right) \right) \\ - \frac{4\pi^2 u_y^2}{\rho(x,z)} \tilde{\phi}(x,u_y,z) = -I_s(x,z), \end{aligned} \quad (1.21)$$

qui peut se réarranger :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho(x,z)} \cdot \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(x,u_y,z)}{\partial x} \right) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(x,z)} \cdot \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(x,u_y,z)}{\partial z} \right) \right) = \frac{4\pi^2 u_y^2}{\rho(x,z)} \tilde{\phi}(x,u_y,z) - I_s(x,z). \end{aligned} \quad (1.22)$$

L'équation prenant alors la forme, pour une fréquence  $u_y$  fixée, d'une équation de Poisson 2-D avec un terme source dépendant de la fréquence et du potentiel. Il est alors possible de connaître le potentiel électrique et de décrire le phénomène d'injection de courant

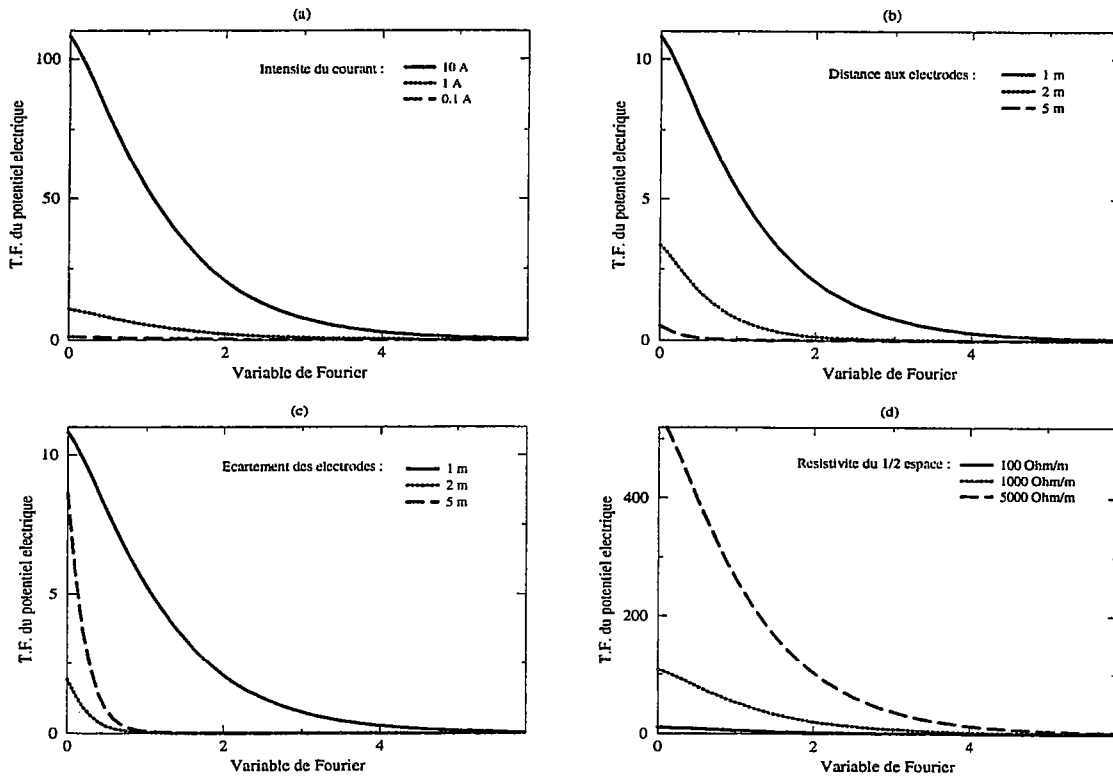


FIG. 1.2. — Comportement de la transformée de Fourier du potentiel électrique en fonction de la variable de Fourier (longueur d'onde duale de la dimension  $y$ ). (a) L'écartement des électrodes  $l$  est de 1 mètre, la résistivité  $\rho$  du milieu est de 100  $\Omega \cdot m$  et la distance aux électrodes est 1 mètre. (b) L'écartement des électrodes  $l$  est de 1 mètre, la résistivité  $\rho$  du milieu est de 100  $\Omega \cdot m$  et l'intensité du courant est 1 A. (c) La résistivité  $\rho$  du milieu est de 100  $\Omega \cdot m$ , l'intensité du courant est 1 A et la distance aux électrodes est 1 mètre. (d) L'écartement des électrodes  $l$  est de 1 mètre, l'intensité du courant est 1 A et la distance aux électrodes est de 1 mètre.

continu dans le sous-sol en calculant une transformée de Fourier inverse. Ce calcul permet d'apprécier le champ électrique en prenant en compte une source de courant ponctuelle 3-D. On obtient le potentiel électrique au point  $M(x, y, z)$  par la relation :

$$\phi(M(x, y, z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}(x, u_y, z) e^{2i\pi u_y y} du_y. \quad (1.23)$$

L'équation (1.22) ne peut se résoudre que numériquement pour des distributions de résistivités  $\rho(x, y)$  complexes. Cette résolution numérique consiste à fixer une valeur pour  $u_y$  et à calculer le potentiel électrique  $2D^{1/2} \tilde{\phi}(x, u_y, z)$  dans Fourier. La résolution de l'intégrale (1.23) se fait également numériquement par la méthode des trapèzes ([Press et al., 1992]). Ainsi, afin de rendre viables numériquement ces calculs, nous allons étudier le comportement du potentiel électrique dans Fourier pour un cas simple.

Le cas considéré est celui du champ de potentiel électrique créé par un dipôle dans un demi-espace homogène. Cette hypothèse simplificatrice permet d'obtenir une solution

analytique [Zhdanov and Keller, 1994] de l'équation de Poisson définissant le potentiel électrique au point  $M(x, y, z)$  :

$$\phi(M(x, y, z)) = \frac{I_s \rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (1.24)$$

avec  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et  $r_2 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2 + z^2}$  où  $l$  est l'écartement des électrodes.

D'après (1.23) le potentiel électrique dans le domaine de Fourier peut être obtenu par :

$$\tilde{\phi}(M(x, u_y, z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y, z) e^{-2i\pi u_y y} dy. \quad (1.25)$$

La transformée de Fourier est présentée sur la figure (1.2). De part la symétrie de la transformation inverse de Fourier seul l'axe positif des abscisses est dessiné.

Les quatre graphes de la figure (1.2) permettent de rendre l'évolution de la transformée de Fourier du potentiel électrique en fonction des quatre paramètres importants : l'intensité du courant, l'écartement des électrodes, la résistivité du demi-espace et la distance du point  $M$  aux électrodes. Le point marquant est la décroissance rapide du potentiel électrique. Cette caractéristique est visible sur toutes les courbes et donc relativement peu dépendante du milieu et de la configuration du dipôle. Il apparaît ainsi qu'en intégrant entre  $u_{y,min} = -4$  et  $u_{y,max} = 4$ , la représentation de la fonction est largement suffisante. D'après l'équation (1.23) et en utilisant les bornes définies, le potentiel électrique est donc fourni par :

$$\phi(x, y, z) = \int_{-u_{y,min}}^{+u_{y,max}} \tilde{\phi}(x, u_y, z) e^{-2i\pi u_y y} du_y. \quad (1.26)$$

De plus, d'après notre hypothèse d'un milieu possédant une invariance selon la direction  $y$ , le calcul du potentiel électrique est nécessaire uniquement en  $y = 0$ . Donc l'évaluation numérique de cette intégrale en  $y = 0$  peut se restreindre à :

$$\phi(x, y = 0, z) = \int_{-u_{y,min}}^{+u_{y,max}} \tilde{\phi}(x, u_y, z) du_y. \quad (1.27)$$

La variation rapide de la fonction à intégrer (cf. fig. (1.2)) impose un pas d'échantillonnage fin près de la fréquence nulle, afin de bien définir l'intégrale dans cette zone qui représente plus de 90 % de la valeur de l'intégrale. La méthode des trapèzes paraît bien adaptée dans ce cas et reste très simple à implémenter. De plus, il est alors possible de changer le pas d'échantillonnage sans pour autant recalculer l'intégralité des valeurs de la fonction aux points considérés. Ceci permettra de ne pas définir spécifiquement le nombre de fréquences à utiliser pour le calcul du potentiel électrique. En effet, en fixant une valeur de tolérance, le pas d'échantillonnage sera réduit jusqu'à ce que cette tolérance soit atteinte.

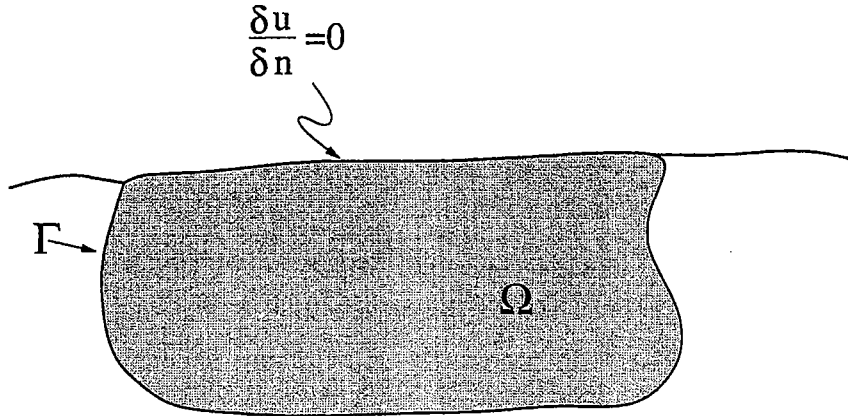


FIG. 1.3. — Modèle de terrain pour le problème de Dirichlet  $P(\Omega, \varphi, f)$ ,  $\Omega$  désigne un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de bord  $\Gamma$ .

### 1.3. Analyse numérique.

#### 1.3.1. Introduction

Notre cas d'étude est typiquement celui d'une équation aux dérivées partielles de type elliptique : l'équation de Poisson. Plus précisément, le problème que l'on veut résoudre est le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson, qui se définit par :

$$P(\Omega, \varphi, f) = \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \Gamma \end{cases} . \quad (1.28)$$

où la première ligne de (1.28) est l'équation de Poisson et la seconde ligne désigne les conditions aux frontières  $\Gamma$ . Dans le problème  $P(\Omega, \varphi, f)$  on cherche la fonction  $u$  et  $\Omega$  désigne un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de bord  $\Gamma$  (cf. fig. (1.3)).  $f$  désigne une fonction définie sur  $\Omega$ , qui avec la fonction  $\varphi$  et l'ouvert  $\Omega$  constituent les données du problème. Les conditions aux limites que nous utiliserons sont celles de Neumann qui sont représentatives de la limite sol-air, cette condition se définit par :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma', \quad (1.29)$$

On ne sait pas, en général, expliciter la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson en fonction des données. Autrement dit, sauf cas particuliers, il est nécessaire de résoudre ce problème *via* des méthodes numériques. Les méthodes de différences finies et aux éléments finis sont aujourd'hui les plus employées. Ces deux méthodes ont été et sont encore employées autant l'une que l'autre pour la résolution des équations aux dérivées partielles de l'électromagnétisme ([Dey and Morrison, 1979]). Il est très difficile de définir laquelle est la plus adaptée à notre problème, même si une formulation en éléments finis permet une meilleure modularité et si la définition de la grille de modélisation est plus en adéquation avec la structure réelle étudiée. Cependant l'implémentation est beaucoup plus lourde que la méthode des différences finies. En fait une résolution par éléments finis est

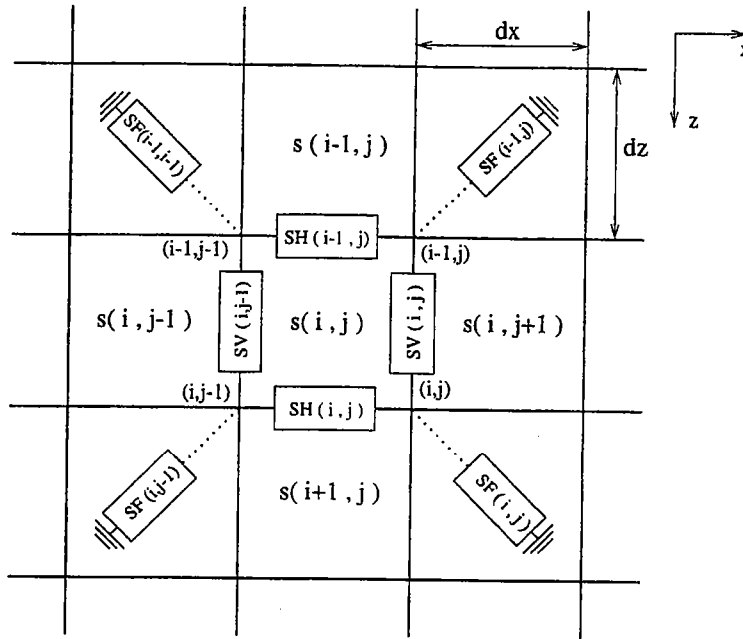


FIG. 1.4. — Portion d'un modèle 3-D cylindrique discrétisé. Les conductances verticales (SV), horizontales (SH) et de fuite (SF) (simulation de la direction infinie  $y$ ) sont évaluées à partir des valeurs de conductivité des mailles adjacentes (d'après [Tripp et al., 1984]).

essentiellement employée dans le cas d'étude de structures, et notamment de structures parfaitement bien définies : pièce de moteur, d'avion ...

Les deux types de formulations permettent d'aboutir à un système linéaire d'équations que l'on peut écrire sous une forme classique :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1.30)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice de l'opérateur (ou matrice de rigidité dans le cas d'une formulation en éléments finis),  $\mathbf{x}$  le vecteur des inconnues (ou degrés de liberté) et  $\mathbf{b}$  un vecteur donné fonction de contraintes extérieures imposées. Dans notre cas, ce vecteur représente les termes sources du courant électrique.  $\mathbf{A}$  est une matrice de très grande taille ( $n_x \times n_y \times n_z$ )  $\times$  ( $n_x \times n_y \times n_z$ ) dans un cas tri-dimensionnel et où  $n_i$  désigne  $n$  mailles dans la direction  $i$ . Cependant cette matrice est très largement creuse, c'est-à-dire que près de 99% ou plus de ces éléments sont nuls, de plus elle possède souvent des propriétés (structure bande, symétrie ...) qui ont permis de développer des méthodes spécifiques de résolution numériques.

### 1.3.2. Réseau de conductance.

La formulation précédente de l'équation de Poisson et les hypothèses réalisées permettent d'aboutir à une analyse numérique simple et fournissant directement un système d'équations linéaires. En effet l'analyse faite par Madden ([Madden and Swift, 1969]) per-

met de discrétiser le milieu étudié par un réseau de conductances (ou de résistances) (fig. (1.4)) fournissant une solution rapide pour le potentiel électrique en chaque noeud de la grille.

Afin de faire une analogie avec les équations gouvernant le voltage  $V$  et le courant  $I$  d'un point source dans une ligne 2-D ("*transmission de surface*"), réécrivons l'équation 1.22 comme ceci :

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{4\pi^2 u_y^2}{\rho(x, z)} \tilde{\phi}(x, u_y, z) - I_s \delta(x) \delta(z), \quad (1.31)$$

et

$$\frac{\partial \phi(x, u_y, z)}{\partial x} = -\rho(x, z) \cdot j_x, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \phi(x, u_y, z)}{\partial z} = -\rho(x, z) \cdot j_z. \quad (1.33)$$

en posant :

$$\mathbf{j} = \mathbf{I}, \quad (1.34)$$

$$\tilde{\phi}(x, u_y, z) = V, \quad (1.35)$$

$$\rho = Z, \quad (1.36)$$

$$\frac{4\pi^2 u_y^2}{\rho} = Y, \quad (1.37)$$

où  $Z$  et  $Y$  sont respectivement les paramètres d'impédance et d'admittance par unité de longueur,  $\mathbf{I}$  est la source de courant, les équations (1.31, 1.32 et 1.33) sont alors analogues à :

$$\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = -YV - I\delta(x)\delta(z), \quad (1.38)$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -ZI_x, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -ZI_z. \quad (1.40)$$

Il apparaît alors nettement une analogie entre les équations (1.31, 1.32 et 1.33) et les équations (1.38, 1.39 et 1.40) décrivant la circulation de courant électrique et le potentiel électrique créés par un point source dans une transmission de surface [Madden, 1971]. En

discrétisant la distribution de résistivité 2-D par une grille à mailles rectangulaires, dont la résistivité est constante dans chaque maille, mais dont le maillage peut être irrégulier, les équations (1.31, 1.32 et 1.33) peuvent alors être approximées par un réseau de conductances.

La figure (1.4) montre une portion du réseau de conductances discrétisant la distribution de conductivité (ou de résistivité). Les coins des mailles rectangulaires de conductivité sont appelés des noeuds, tandis que les lignes joignant les noeuds sont appelées les branches du réseau. Les paires d'électrodes, placées sur la surface du sol, seront toujours situées dans le plan  $y = 0$  dans notre étude.

Les éléments de conductances verticales  $SV$  représentent la combinaison des conductances de la moitié des cellules immédiatement à droite et à gauche de la branche du réseau associées à  $SV$ . Les conductances horizontales sont définies dans des termes similaires et sont estimées à l'aide des cellules situées au-dessus et au-dessous. Ainsi, pour un noeud  $(i,j)$  d'une grille quelconque, nous trouvons :

$$SV(i, u_y, j) = \frac{1}{2dz(i)} [dx(j) \cdot s(i, j) + dx(j+1) \cdot s(i, j+1)], \quad (1.41)$$

et :

$$SH(i, u_y, j) = \frac{1}{2dx(j)} [dz(i) \cdot s(i, j) + dz(i+1) \cdot s(i+1, j)]. \quad (1.42)$$

où  $s(i, j)$  est la conductivité de la maille  $(i, j)$ .

La conductance au noeud  $(i,j)$  du sous-sol est définie en additionnant, en parallèle, la moyenne des conductances des 4 cellules avoisinantes. Cette conductance est aussi appelée conductance de fuite. Ainsi, pour une fréquence  $u_y$  donnée, la conductance de fuite  $SF$  au noeud  $(i,j)$  s'écrit :

$$SF(i, u_y, j) = \frac{u_y^2}{4} (dx(j)dz(i)s(i, j) + dx(j+1)dz(i)s(i, j+1) + dx(j)dz(i+1)s(i+1, j) + dx(j+1)dz(i+1)s(i+1, j+1)) \quad (1.43)$$

Sous la condition que les noeuds aux bords du réseau de conductances formées par les éléments  $SV$ ,  $SH$  et  $SF$  aient leur voltage égal à zéro ; alors la réponse du réseau à une source de courant, appliqué à un noeud arbitraire peut être obtenue en appliquant la seconde loi de Kirchhoff qui requière que la somme des courants entrant dans un noeud quelconque du réseau de conductances doit être nulle. Ceci nous permet d'obtenir un système d'équations linéaires :

$$\mathbf{A} \cdot \widetilde{\phi_{u_y}} = \mathbf{b}, \quad (1.44)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice de l'opérateur,  $\widetilde{\phi_{u_y}}$  le vecteur inconnu des potentiels électriques dans le domaine de Fourier et  $\mathbf{b}$  le vecteur décrivant les sources connues de courant. Dans notre cas, le système (1.44) se développe :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ddots & 0 & a_{k-2,l} & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & a_{k-1,l} & 0 & \ddots & 0 \\ \ddots & 0 & \ddots & a_{k,l} & \ddots & 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & 0 & a_{k+1,l} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & a_{k-2,l} & 0 & \ddots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\phi_{1,u_y}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{\phi_{k,u_y}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{\phi_{n,u_y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

La matrice  $A$  est une matrice diagonale, creuse et possédant uniquement 5 bandes. En fait, cette matrice est essentiellement similaire à une matrice obtenue par une formulation en différences finies stricte. L'utilisation de l'opérateur Laplacien à 5 branches fournit un système linéaire dont la matrice opérateur  $A$  est une matrice creuse, diagonale et possédant une structure à 5 bandes. Ainsi, la discrétisation en réseau de conductances permet d'obtenir un système d'équations équivalent à une formulation en différences finies.

En remplaçant les coefficients de la matrice  $A$  par les valeurs des conductances horizontales, verticales et de fuites et en utilisant les indices de la grille de modélisation (Fig. : (1.4)), le système, pour  $N=3$ , s'écrit :

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & -h_{1,1} & 0 & -v_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_{2,1} & f_{2,1} & -h_{2,1} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_{3,1} & f_{3,1} & -h_{3,1} & 0 & -v_{3,1} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{1,2} & 0 & -h_{1,2} & f_{1,2} & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -v_{2,2} & 0 & -h_{2,2} & f_{2,2} & -h_{2,2} & 0 & -v_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & -v_{3,2} & 0 & \ddots & f_{3,2} & \ddots & 0 & -v_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & -v_{1,3} & 0 & -h_{1,3} & f_{1,3} & -h_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & f_{2,3} & -h_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v_{3,3} & 0 & -h_{3,3} & f_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \\ b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ b_{3,2} \\ b_{1,3} \\ b_{2,3} \\ b_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

où  $f, h, v$  et  $u$  représentent respectivement, les conductances de fuites, horizontales, verticales et le potentiel électrique au noeud  $(i,j)$ .

### 1.3.3. Résolution numérique.

#### 1.3.3.1. Introduction.

La discrétisation des équations de Maxwell conduit à la résolution de systèmes linéaires de la forme :

$$A \cdot \phi_{u_y} = b. \quad (1.47)$$



La matrice  $A$  qui intervient dans notre problème est creuse (cf. eq. (1.45)), et il est judicieux de ne pas stocker les éléments nuls, sous peine de saturer rapidement la mémoire de l'ordinateur (cf. encart 1). Ainsi la résolution des problèmes linéaires creux conduit souvent à rechercher un compromis entre la quantité de mémoire nécessaire et le volume de calculs à effectuer. Généralement deux types de méthodes de résolution pour ce type de système linéaire sont différenciés : les méthodes directes, qui permettent de résoudre le système linéaire en un nombre fini et déterminé d'opérations, et les méthodes itératives, qui construisent des suites de vecteurs (le vecteur des inconnues) qui convergent plus ou moins rapidement vers la solution du système linéaire.

La plupart des méthodes directes (ex. la décomposition de Cholesky [Tripp et al., 1984]) consistent à décomposer judicieusement la matrice  $A$  afin de la rendre inversible, propriété qu'elle ne possède pas à l'origine. Le principal avantage de ces méthodes réside dans la possibilité de résoudre de nombreuses fois le système linéaire (1.47) pour des valeurs différentes du vecteur  $b$  sans qu'il soit nécessaire de reconstruire la matrice inverse (ou la pseudo-inverse)  $A^{-1}$ . Cependant, ceci implique l'élaboration de la matrice  $A$ , ce qui peut être relativement délicat à implémenter, mais surtout le stockage en mémoire des matrices issues de la décomposition de  $A$  qui sont nettement moins creuses que  $A$  et qui demandent beaucoup plus de ressources de stockage.

Ainsi malgré cet intérêt des méthodes directes, la dimension de nos modèles nous orientent vers les méthodes itératives qui permettent de travailler directement sur la grille des inconnues (les valeurs du potentiel électrique aux noeuds de la grille dans notre cas). En effet, ces méthodes de résolution des systèmes linéaires ne nécessitent pas l'élaboration de la matrice  $A$  puisque seule la connaissance des relations en un noeud de la grille est nécessaire. Ceci est parfaitement bien adapté à notre problème et à notre choix de discrétisation. Effectivement, le système linéaire (1.47) a été construit à l'aide d'une relation définie localement en chaque noeud de la grille de résistivité, or si cette relation locale est simple à construire, il est beaucoup moins évident de construire intégralement la matrice  $A$ .

**Encart 1 : Estimation des ressources informatiques nécessaires à l'élaboration de la matrice  $A$ .**

Soit une grille de discrétisation de taille  $N=128 \times 128$ , le nombre de degré de liberté (ou d'inconnues) est de  $128 \times 128 = 16384$ . Cette dimension de grille est typiquement une dimension à laquelle nous espérons pouvoir résoudre notre problème. Ainsi la dimension de la matrice  $A$  est égale à  $M=16384 \times 16384$  soit environ  $2.684 \cdot 10^8$  éléments. Au minimum, il faut compter 2 octets pour stocker chaque éléments de la matrice soit 4096 MegaOctets. Cette capacité de mémoire vive (RAM) ne se rencontre actuellement que sur de gros calculateurs et représentent un investissement financier très important. Ce calcul met parfaitement en évidence la nécessité de choisir judicieusement la méthode de résolution numérique.

Parmi les méthodes itératives, il nous faut distinguer entre les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel d'une part, qui reposent également sur une décomposition judicieuse de la matrice  $A$ , et les méthodes qui consistent à rechercher le minimum d'une fonctionnelle

d'autre part, comme les méthodes du gradient et du gradient conjugué. Les méthodes de gradient sont considérées actuellement comme étant les méthodes les plus rapides, notamment avec l'utilisation d'un pré-conditionnement adéquat. Cependant elles requièrent des propriétés de la matrice  $\mathbf{A}$ , notamment celle de symétrie; or, la discrétisation employée précédemment ne fournit pas une matrice  $\mathbf{A}$  symétrique. Ainsi les méthodes itératives de type Jacobi semblent les plus adaptées à la résolution de notre système linéaire. Ces méthodes sont aussi appelées algorithmes de relaxation car le principe général est de calculer la valeur inconnue d'un noeud à partir de la moyenne des noeuds voisins, dont les valeurs sont celles de l'itération précédente, plus la contribution des termes sources. Ce calcul est réitéré afin de converger vers la solution du système linéaire. La performance des algorithmes de relaxation est étroitement liée au nombre d'itérations permettant d'obtenir la solution (i.e. la vitesse de convergence). La figure (1.5) présente l'évolution du plus grand écart enregistré entre deux itérations successives (variation relative) en fonction du nombre total d'itérations pour les quatre principales méthodes de relaxation. Ces quatre méthodes itératives vont être développées, car même si nous ne retiendrons pas ces méthodes pour résoudre le problème direct, elles seront partie intégrante de l'algorithme final.

### 1.3.3.2. Les méthodes de relaxation

La méthode de Jacobi est la plus ancienne des techniques de relaxation et bien qu'elle soit très peu utilisée à cause d'une convergence très lente (Fig. (1.5a)), elle demeure une base pour comprendre les méthodes modernes.

Le principe de base des méthodes itératives est le même que celui des méthodes directes, et il consiste à décomposer judicieusement la matrice  $\mathbf{A}$  afin d'aboutir à des matrices diagonales, facilement inversibles, ou à des systèmes triangulaires, facilement solubles. La notion itérative réside dans le fait que nous construisons une série de vecteurs  $\mathbf{X}^r$ ,  $r \geq 1$ , où  $\mathbf{X}^r$  est le vecteur des inconnues à l'itération  $r$ ; cette suite de vecteurs converge vers la solution du système linéaire (cf. eq. (1.47)) lorsque  $r \mapsto +\infty$ . En effet supposons que la matrice  $\mathbf{A}$  soit décomposée en une différence de deux matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  de même dimension, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} - \mathbf{M}, \quad (1.48)$$

Si  $\mathbf{K}$  est une matrice régulière, l'équation (1.47) peut se transformer en utilisant (1.48) de la façon suivante :

$$\mathbf{K} \cdot \phi_{u_y} = \mathbf{M} \cdot \phi_{u_y} + \mathbf{b}, \quad (1.49)$$

soit encore :

$$\phi_{u_y} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_{u_y} + \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.50)$$

Cette relation fait apparaître le vecteur des inconnues ( $\phi_{u_y}$ ) dans les deux termes, c'est pourquoi cette relation a suggéré de fournir un vecteur initial ( $\phi_{u_y}^0$ ) quelconque puis

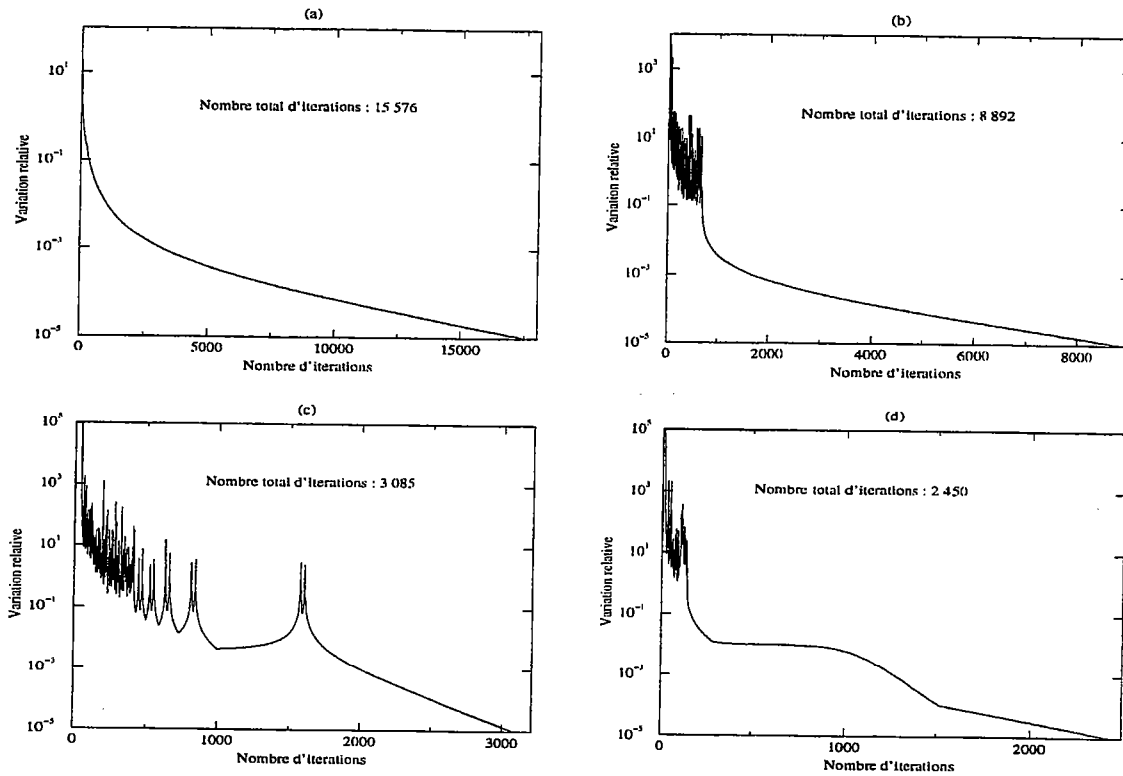


FIG. 1.5. — Vitesse de convergence pour 4 méthodes de relaxation. La variation relative représente le plus grand écart enregistré entre deux itérations successives. La grille utilisée simule un terrain homogène de résistivité égale à  $100 \Omega.m$ , sa taille est de  $N=100$  et les sources de courant sont situées au centre, avec un écartement de 20 m. (a) Equilibre obtenu par relaxation de Jacoby. (b) Equilibre obtenu par relaxation de Gauss-Seidel. (c) Equilibre obtenu par surrelaxation successive. (d) Equilibre obtenu par surrelaxation cyclique de Chebychev (N.B. : les échelles des axes ne sont pas identiques).

de calculer itérativement des vecteurs successifs, selon l'équation suivante et pour  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$  :

$$\phi_{u_y}^{(r+1)} = K^{-1} \cdot M \cdot \phi_{u_y}^{(r)} + K^{-1} \cdot b. \quad (1.51)$$

La méthode de Jacobi considère la décomposition de la matrice  $A$  suivante :

$$A = L + D + U, \quad (1.52)$$

où  $K = L$  et  $M = -(D + U)$ . La matrice  $D$  est la partie diagonale de  $A$ ,  $L$  est le triangle inférieur de  $A$  avec des zéros sur la diagonale, et  $U$  est le triangle supérieur de  $A$  avec,

également, des zéros sur la diagonale, schématiquement nous avons donc :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{D} & \mathbf{U} & \\ & & \mathbf{L} & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

L'équation (1.47) pour la méthode de Jacobi s'écrit au  $r^{ieme}$  pas d'itération :

$$\mathbf{D} \cdot \phi_{u_y}^{(r)} = -\mathbf{U} \cdot \phi_{u_y}^{(r-1)} + \mathbf{b}, \quad (1.54)$$

ou

$$\phi_{u_y}^{(r)} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{U} \cdot \phi_{u_y}^{(r-1)} + \mathbf{b}), \quad (1.55)$$

qui peut également s'écrire composante par composante et en explicitant les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{U}$  :

$$\phi_{i,u_y}^{(r)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( - \sum_{j=1(\neq i)}^N a_{ij} \phi_{j,u_y}^{(r-1)} + b_i \right), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.56)$$

Cette relation met en relation les termes du vecteur des inconnues à l'itération  $r$  et ceux obtenus à l'itération précédente ( $r-1$ ). A partir de cette relation et en utilisant notre matrice  $\mathbf{A}$  calculée dans la section précédente (cf. eq. (1.46), p. 20), on obtient la formule itérative que nous pourrions directement implémenter dans nos algorithmes :

$$\phi_{i,j}^{(r)} = \frac{b_{i,j} + \phi_{i-1,j}^{(r-1)} \cdot h_{i,j} + \phi_{i+1,j}^{(r-1)} \cdot h_{i+1,j} + \phi_{i,j-1}^{(r-1)} \cdot v_{i,j} + \phi_{i,j+1}^{(r-1)} \cdot h_{i,j+1}}{f_{i,j} \cdot (1 - 4\pi^2 \lambda^2)}. \quad (1.57)$$

Cette relation met en évidence l'inutilité de l'élaboration de la matrice  $\mathbf{A}$ , puisqu'en effet seul les résistances horizontales, verticales et de fuite environnantes sont employées dans le calcul du potentiel électrique d'un noeud de la grille de résistivité.

La condition de convergence de la matrice d'itération, appelée aussi matrice de *Jacobi* :  $(-\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U}))$  est contenue dans ses valeurs propres et plus précisément dans le rayon spectral (valeur propre ayant le module le plus élevé). En effet, celui-ci doit être inférieur à 1 pour permettre la convergence et d'aboutir à un équilibre. L'évaluation du rayon spectral permet de définir une condition de convergence avant de réaliser le calcul itératif. Cependant, de manière générale, la méthode de Jacobi converge pour les matrices  $\mathbf{A}$  à diagonale dominante, et on a pu voir que les matrices issues d'une formulation en différences finies respectent généralement cette condition.

Le nombre d'itérations nécessaires pour équilibrer une grille  $N \times N$  avec la méthode Jacobi est proportionnel à  $N^2$ , ce qui la rend peu utilisable dans le cas de problème avec des grilles assez importantes ( $N > 100$ ).

Un autre algorithme classique de relaxation est la méthode Gauss-Seidel, laquelle estime la valeur (le potentiel électrique) du noeud considéré en utilisant les valeurs disponibles calculées au même pas d'itération. En d'autres termes, pour une itération donnée, la moyenne des 4 noeuds voisins contient deux valeurs évaluées à l'itération précédentes (ceux d'indices  $(i,j+1)$  et  $(i+1,j)$ ) et deux valeurs calculées à cette itération (indices  $(i,j-1)$  et  $(i-1,j)$ ). La technique de décomposition de la matrice pour cette méthode fournit :

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D}) \cdot \phi_{uy}^{(r)} = -\mathbf{U} \cdot \phi_{uy}^{(r-1)} + \mathbf{b}. \quad (1.58)$$

Le fait que la matrice  $\mathbf{L}$  soit dans le terme de gauche de l'équation (1.58) permet l'introduction des valeurs calculées à l'itération  $r$ . La vitesse de convergence de cette méthode est environ deux fois plus rapide que Jacobi mais également proportionnelle à  $N^2$  (Fig. (1.5b)). Cette faiblesse dans la vitesse de convergence a été corrigée en développant un algorithme réalisant une correction de la valeur calculée ( $\phi_{uy}$ ) au  $r^{ieme}$  pas d'itération de Gauss-Seidel, avant l'itération suivante. Ceci permet alors d'anticiper les corrections futures et d'accélérer la convergence du problème.

En additionnant et en soustrayant  $\phi_{uy}^{(r-1)}$  dans le terme de droite de l'équation (1.58), la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\phi_{uy}^{(r)} = \phi_{uy}^{(r-1)} - (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot [(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} \cdot \phi_{uy}^{(r-1)} - \mathbf{b})]. \quad (1.59)$$

Le terme entre crochets est le vecteur résiduel  $\xi^{(r+1)}$ , l'équation précédente se résume donc à :

$$\phi_{uy}^{(r)} = \phi_{uy}^{(r-1)} - (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \xi^{(r-1)}, \quad (1.60)$$

La correction se définit alors par :

$$\phi_{uy}^{(r)} = \phi_{uy}^{(r-1)} - \omega(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \cdot \xi^{(r-1)}, \quad (1.61)$$

où  $\omega$  est le paramètre de surrelaxation. La méthode est appelée surrelaxation successive. Cet algorithme est convergent uniquement pour  $0 < \omega < 2$ . Et souvent, seule la surrelaxation ayant  $1 < \omega < 2$  peut donner une convergence plus rapide que la méthode Gauss-Seidel sous certaines restrictions mathématiques, généralement satisfaites par les matrices issues d'une formulation en différences finies. Le paramètre de surrelaxation se calcule à l'aide du rayon spectral ( $\rho$ ) de la matrice d'itération de Jacobi. Le choix optimal de  $\omega$  est alors fourni par :

$$\omega = \frac{2}{2 + \sqrt{1 - \rho_{jacobyl}^2}}. \quad (1.62)$$

L'introduction d'une correction dans la méthode de Gauss-Seidel permet d'obtenir une vitesse de convergence environ 10 fois plus rapide que celle de Jacobi (Fig (1.5c)). En effet, le nombre d'itérations pour atteindre l'équilibre fixé est alors proportionnel à  $N$ . La dimension de la grille n'intervient donc plus qu'avec un exposant de 2, et pour des grilles de dimension élevée il apparaît évident que la différence est importante.

Méthode de résolution	Nombre d'itération	Nombre d'opérations par itération	Nombre d'opérations élémentaires
Jacobi	$\propto N^2$	$\propto N^2$	$\propto N^4$
Gauss-Seidel	$\propto N^2$	$\propto N^2$	$\propto N^4$
Sur-Relaxation	$\propto N$	$\propto N^2$	$\propto N^3$
Décomposition de Cholesky	1	$\propto N^3$	$\propto N^3 + \propto N^4$

TAB. 1.1. – Nombre d'opérations élémentaires totales pour différentes méthodes de résolution.

Un autre point pratique qui a été étudié est l'ordre dans lequel les calculs sont effectués. Classiquement la stratégie employée consiste à procéder ligne après ligne (ou colonne après colonne). Cependant, on peut diviser la grille en une grille paire et une impaire, la représentation de la grille finale correspond à celle d'un damier. Le calcul d'une maille d'une des grilles utilise donc les valeurs de l'autre grille. Il est alors possible d'améliorer le taux de convergence en recalculant le paramètre de surrelaxation à chaque demi-pas d'itération (paire et impaire). Cette méthode est appelée surrelaxation cyclique de Chebychev (Fig. (1.5d)).

Le tableau (1.1) présente une estimation du nombre total d'itérations nécessaires à l'obtention de la solution pour les méthodes itératives précédentes, et à titre de comparaison pour une méthode directe (la décomposition de Cholesky). La colonne intitulée "*nombre d'itération*" donne une estimation du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un équilibre lors de la convergence de la méthode, cette description ne s'applique pas la décomposition de Cholesky. Celle nommée "*nombre d'opérations par itération*" donne le nombre d'opérations à réaliser pour une itération, typiquement, il s'agit de calculer (eq. (1.57)) pour chaque noeud. Dans le cas de la décomposition de Cholesky, le nombre d'opération est celui nécessaire à la résolution du système linéaire, c'est-à-dire que le calcul consiste à effectuer  $N^3$  produits scalaires de 2 vecteurs de taille  $N$ , ce qui conduit à  $N^3$  couples.

La dernière colonne fournie une estimation du nombre total d'opérations élémentaires nécessaires à la résolution de (1.47). Toujours dans le cas de la décomposition de Cholesky, le coût, en termes d'opérations élémentaires de calculs, de la décomposition a été rajouté, et uniquement ici, car elle représente un investissement de base. On constate que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont plus coûteuses qu'une décomposition de Cholesky, alors que la sur-relaxation l'est moins et ce d'autant que  $N$  est grand. Cependant, malgré la qualité des résultats fournis par ces méthodes itératives, le temps de calcul reste un problème majeur, notamment lorsque de nombreux systèmes linéaires sont à résoudre. Ainsi de nouveaux algorithmes ont été créés afin de pallier le principal défaut de ces méthodes itératives : la résolution des informations basses fréquences, c'est-à-dire celles concernant un grand ensemble de noeuds.

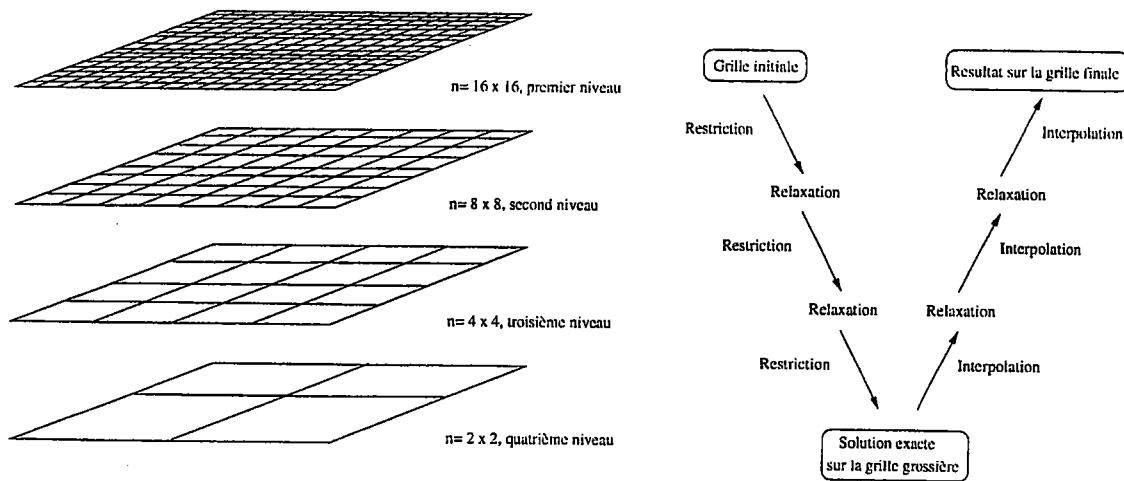


FIG. 1.6. – Schéma simple du principe d'une correction par grille grossière, méthode à la base des résolutions multigrilles complètes.

### 1.3.4. Les méthodes multigrilles.

#### 1.3.4.1. Introduction.

Les recherches en analyse numérique de ces 20 dernières années ont démontré des propriétés importantes des méthodes multigrilles pour de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles. La principale propriété est que le taux de convergence est indépendant du nombre d'inconnues, c'est-à-dire ne dépend pas de la dimension de la grille utilisée dans notre cas. Cette particularité permet donc aux méthodes multigrilles d'être les méthodes de résolution des grands systèmes linéaires les plus performantes.

Malgré les performances de ces méthodes de résolution, elles restent d'usage très limité, ceci étant principalement dû à un problème de méconnaissance et peut-être à une formulation mathématique un peu complexe [Briggs, 1987]. Cependant un autre point, plus pratique, est également responsable de la non-prolifération de ce type de méthodes. En effet, les méthodes multigrilles sont intrinsèquement de nature récursive, or le FORTRAN 77 (langage fortement répandu dans les milieux universitaires) n'intègre pas la récursivité. Ainsi, les méthodes de résolution multigrilles ne pouvaient s'implémenter que via des astuces particulières, rendant l'utilisation peu souple. L'évolution du FORTRAN (version F90 et F95) permet maintenant d'intégrer directement une implémentation récursive d'un algorithme multigrille. Ainsi nous avons décidé d'utiliser les méthodes multigrilles pour résoudre le système linéaire du problème direct.

L'idée, sur laquelle repose les méthodes multigrilles, est venue d'une caractéristique générale des méthodes classiques de relaxation qui convergent rapidement lorsque la solution comporte uniquement des composantes hautes fréquences. La convergence est fortement ralentie lorsque des composantes ayant des longueurs d'ondes supérieures à la distance entre deux noeuds de la grille sont présentes. Cette décroissance de la vitesse de convergence est quasiment proportionnelle aux longueurs d'ondes des composantes du champ de potentiel étudié. Donc il apparaît que les méthodes classiques de relaxation sont de bons

opérateurs de lissage mais que les composantes basses fréquences ralentissent énormément la convergence. Or, pour obtenir une solution approchée de ces composantes, il n'est pas nécessaire d'avoir une grille fine, puisqu'elles seront raisonnablement représentées sur des grilles plus grossières.

Le principe général est donc de restreindre notre problème sur une grille de taille inférieure, réduisant ainsi le nombre de variables et d'opérations (fig. 1.6) et donc le temps de calcul, puis de raffiner la grille afin de résoudre progressivement les composantes multi-fréquences du signal. Cette restriction sur une grille de dimension plus faible (en général :  $N_{new} = N_{old}/2$ ), permet alors de calculer une solution exacte du problème ou d'obtenir très rapidement une solution approchée.

Deux principaux types d'algorithmes multigrilles peuvent être définis : un linéaire et un non-linéaire. La première approche, appelée "méthode multigrille", est strictement une technique permettant d'accélérer la convergence des méthodes traditionnelles de relaxation, sur une grille de dimension finale pré-définie. Dans ce cas, le problème n'a besoin d'être défini que sur cette grille (i.e. : l'évaluation des termes sources (soit la matrice  $\mathbf{b}$  de l'équation (1.44)) n'est nécessaire que pour la grille la plus fine). Les autres grilles, plus grossières, peuvent être vues comme des calculs temporaires supplémentaires.

La deuxième approche, "*the Full Multigrid Method (FMG)*" requière une définition du problème (évaluation des termes sources) sur les différentes tailles de grilles. Dans cette approche, la méthode fournit des solutions successives sur les grilles de plus en plus fines. On peut alors arrêter la solution à une grille de dimension donnée, ou suivre l'erreur de troncature due à la discrétisation et s'arrêter lorsque celle-ci devient insignifiante.

Nous utiliserons ces deux approches car la première permet de conserver la grande robustesse des méthodes de relaxation, notamment en présence d'un signal possédant des composantes très hautes fréquences, la seconde possédant une résolution extrêmement rapide et non itérative.

#### 1.3.4.2. Principe : exemple d'une méthode 2-grilles.

Afin de comprendre l'idée principale des méthodes multigrilles, on va considérer un cas simple, celui d'une méthode 2-grilles. En gardant les mêmes notations que précédemment, on a le système linéaire suivant à résoudre :

$$\mathbf{A} \cdot \phi = \mathbf{b}. \quad (1.63)$$

La discrétisation de cette équation (1.63) sur une grille uniforme de maille  $h$ , peut s'écrire :

$$\mathbf{A}_h \cdot \phi_h = \mathbf{b}_h. \quad (1.64)$$

Notons  $\tilde{\phi}_h$  une solution approchée de l'équation (1.64),  $\phi_h$  sera utilisée pour noter la solution exacte de l'équation (1.64). L'erreur sur  $\tilde{\phi}_h$ , ou la correction, s'écrit donc :

$$\mathbf{v}_h = \phi_h - \tilde{\phi}_h, \quad (1.65)$$

et le résidu :



$$\mathbf{d}_h = \mathbf{A}_h \tilde{\phi}_h - \mathbf{b}_h. \quad (1.66)$$

On peut écrire (1.66) en substituant  $\tilde{\phi}_h$  par  $\tilde{\phi}_h = \phi_h - \mathbf{v}_h$ , (cf équa. (1.65)) :

$$\mathbf{d}_h = \mathbf{A}_h (\phi_h - \mathbf{v}_h) - \mathbf{b}_h. \quad (1.67)$$

Comme  $\mathbf{A}_h$  est linéaire on peut simplifier (1.67) et donc le résidu peut se définir par :

$$\mathbf{A}_h \mathbf{v}_h = -\mathbf{d}_h. \quad (1.68)$$

A ce niveau, il est nécessaire de réaliser une approximation de  $\mathbf{A}_h$  afin de trouver  $\mathbf{v}_h$ . Les méthodes itératives classiques, comme Jacobi ou Gauss-Seidel (cf. §1.3.3.1) réalisent à chaque pas une approximation du type :

$$\widehat{\mathbf{A}}_h \cdot \hat{\mathbf{v}}_h = -\mathbf{d}_h, \quad (1.69)$$

où  $\widehat{\mathbf{A}}_h$  est un opérateur plus simple que  $\mathbf{A}_h$ . Par exemple,  $\widehat{\mathbf{A}}_h$  est la partie diagonale de  $\mathbf{A}_h$  pour l'itération de Jacobi, ou le triangle inférieur pour l'itération de Gauss-Seidel. La prochaine approximation est alors générée par :

$$\tilde{\phi}_h^{new} = \tilde{\phi}_h + \hat{\mathbf{v}}_h. \quad (1.70)$$

Maintenant, considérons un type complètement différent d'approximation pour  $\mathbf{A}_h$ , plus précisément au lieu de *simplifier*, nous allons *grossir*. C'est-à-dire que nous formons une approximation appropriée  $\mathbf{A}_H$  de  $\mathbf{A}_h$  sur une grille plus grossière avec une maille de taille  $H$  (nous prenons  $H = 2h$ , mais d'autres choix peuvent être possibles). L'équation résiduelle (1.66) est maintenant approximée par :

$$\mathbf{A}_H \mathbf{v}_H = -\mathbf{d}_H. \quad (1.71)$$

Comme  $\mathbf{A}_H$  a une dimension plus petite, cette équation (1.71) est plus facile à résoudre. Pour définir le résidu  $\mathbf{d}_H$  sur la grille plus grossière, un opérateur de restriction  $\mathbf{R}$  est nécessaire pour restreindre  $\mathbf{d}_h$  vers la grille plus grossière :

$$\mathbf{d}_h = \mathbf{R} \mathbf{d}_H. \quad (1.72)$$

Afin d'obtenir la solution pour la grille de départ (la plus fine), une interpolation de la solution vers la grille fine est nécessaire. Cette opération est réalisée à l'aide d'un opérateur de prolongement  $\mathbf{P}$  :

$$\hat{\mathbf{v}}_h = \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}_H. \quad (1.73)$$

Les opérateurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{P}$  sont choisis comme étant des opérateurs linéaires. Finalement l'approximation  $\tilde{\phi}_h$  peut être réévaluée :

$$\tilde{\phi}_h^{new} = \tilde{\phi}_h + \tilde{\mathbf{v}}_h. \quad (1.74)$$

Une étape complète du schéma de correction par grille grossière peut se résumer à :

- Calcul du résidu sur la grille fine (1.66).
- Restriction du résidu par (1.72).
- Résolution exacte de (1.71) sur la grille grossière pour la correction.
- Interpolation de la correction vers la grille fine par (1.73).
- Calcul de la prochaine approximation par (1.74).

Comme cela a été expliqué précédemment, la correction par grille grossière n'est pas une méthode convergente, elle est même divergente pour des grilles possédant des composantes hautes fréquences, ce qui est évident puisque des informations de dimension égale à la distance entre deux noeuds de la grille fine (les composantes ayant une longueur d'onde  $\leq 2H$ ) ne pourront être résolues. C'est-à-dire que l'erreur liée à ces composantes ne pourra pas être réduite à zéro sur la grille grossière. Or, c'est sur cette grille grossière que le système est résolu. Il est donc nécessaire de la coupler avec des méthodes itératives classiques. En effet, ce sont exactement ces composantes hautes fréquences qui peuvent être obtenues par relaxation sur la grille fine, et ceci avec seulement quelques itérations. Ceci conduit à l'idée d'une correction grille grossière et par relaxation :

- Pré-lissage : calcul de  $\tilde{\phi}_h$  en appliquant  $\nu_1 \geq 0$  pas d'itération d'une méthode de relaxation à  $\tilde{\phi}_h$ .
- Correction par grille grossière : utilisation de  $\tilde{\phi}_h$  pour obtenir  $\tilde{\phi}_h^{new}$ .
- Post-lissage : calcul de  $\tilde{\phi}_h^{new}$  en appliquant  $\nu_2 \geq 0$  pas d'itération d'une méthode de relaxation à  $\tilde{\phi}_h^{new}$ .

Il ne reste plus qu'une petite étape pour passer d'une résolution 2-grilles à une résolution multigrille. Au lieu de résoudre exactement l'équation (1.71), nous pouvons calculer une approximation de la solution en réintroduisant la même grille grossière et en utilisant la méthode itérative 2-grilles. Si le facteur de convergence est suffisamment petit, peu d'itérations seront nécessaires pour obtenir une bonne approximation de la solution. Le nombre d'itérations est classiquement noté :  $\gamma$ . Cette idée peut également être appliquée récursivement pour descendre sur des grilles de plus en plus grossières. Une itération complète de la méthode multigrille, c'est-à-dire descendre de la grille la plus fine jusqu'à la grille la plus grossière et remonter, est appelée un *cycle* (cf fig. 1.6). La structure exacte d'un cycle dépend de la valeur de  $\gamma$  (i.e. le nombre d'itération 2-grilles entre chaque étape). Le cas  $\gamma = 1$  est appelé V-cycle et le cas  $\gamma = 2$  W-cycle (Fig (1.7)).

#### 1.3.4.3. Opérateurs de lissage, de restriction et de prolongement.

**Opérateur de lissage.** La procédure de lissage est une composante centrale des algorithmes multigrilles. Généralement une méthode itérative linéaire est choisie, cette méthode doit être peu coûteuse, car elle est employée un grand nombre de fois et représente la part principale du temps de calcul. Une méthode très largement utilisée est celle de Gauss-Seidel, parce qu'elle possède une assez bonne convergence. De plus dans le cas typique d'équations elliptiques de second ordre (équa. (1.63)) il est souvent meilleur de choisir un ordre "red-black" pour les noeuds du réseau. En effet, la forme exacte de la méthode de Gauss-Seidel (§ 1.3.3.1) dépend de la séquence choisie pour le calcul des points de la grille. Une séquence "red-black", appelée aussi méthode du damier, consiste à considérer une itération complète

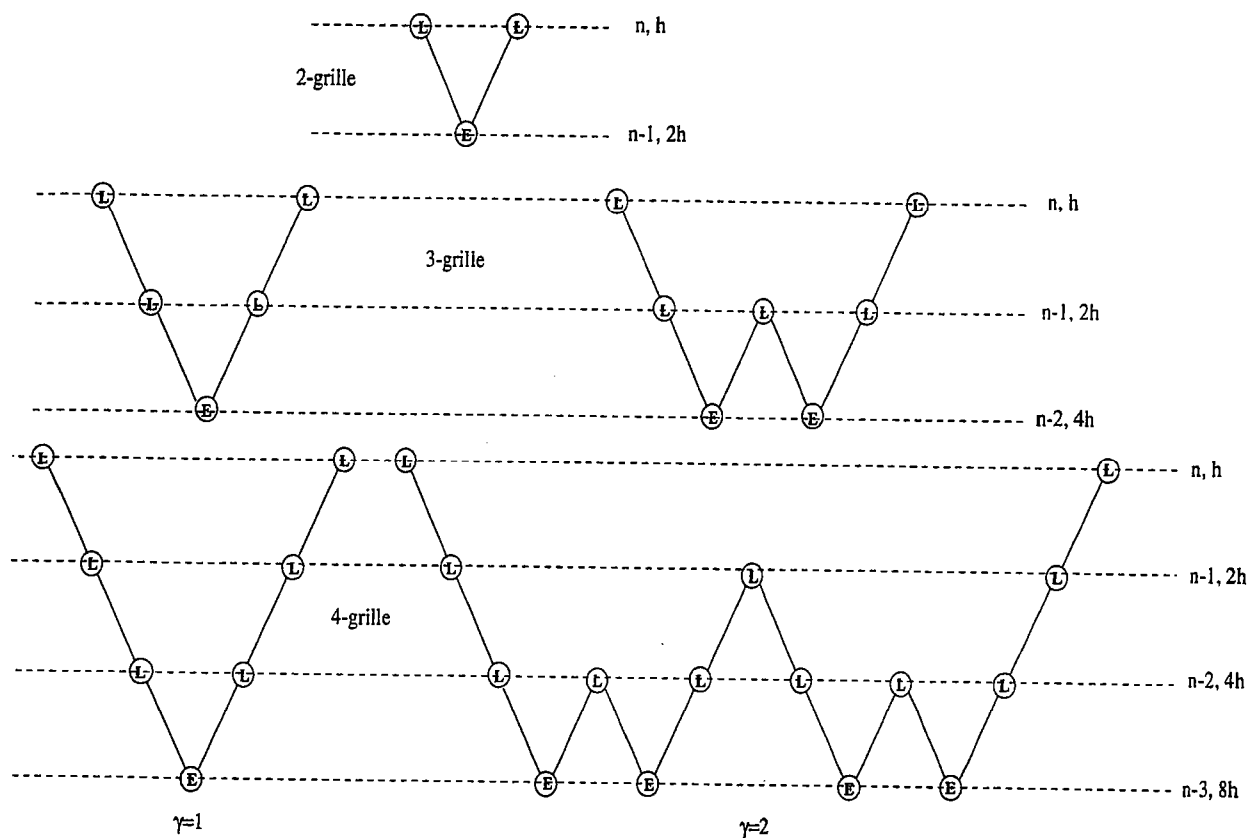


FIG. 1.7. — Structure de différents cycles multigrilles. L indique une opération de lissage et E le calcul de la solution exacte sur la grille la plus grossière. Chaque ligne descendante \ indique une restriction ( $R$ ) vers la grille grossière tandis que chaque ligne montante / signifie un prolongement ( $P$ ) vers la grille fine. La grille la plus fine est en haut de chaque diagramme.

de la grille en deux demi-itérations. La grille complète pouvant se représenter comme un damier (alternativement des noeuds “red” et “black”) et chaque demi-itération consistant à estimer les noeuds d’un type à partir des valeurs des noeuds de l’autre type.

Les méthodes de sur-relaxation ne peuvent être utilisées comme opérateurs de lissage, en effet les composantes hautes-fréquences sont détruites lors du lissage (ceci explique en partie la convergence rapide de cette méthode de relaxation), or celles-ci sont cruciales pour les méthodes multigrilles. Puisqu’en effet n’étant pas résolues lors de la correction par grille grossière, si l’opérateur de lissage les détruit, ces composantes ne seront jamais représentées dans la solution. Ainsi nous avons implémenté une procédure de lissage basée sur la méthode de Gauss-Seidel avec un ordre “red-black” pour calculer les noeuds du réseau de conductance.

**Opérateur de prolongement.** L’opérateur de prolongement le plus populaire est une simple interpolation bilinéaire, c’est également celui que nous utiliserons, qui se définit par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (1.75)$$

Comme la procédure de lissage utilise une séquence red-black, il n'est pas nécessaire de prolonger tous les noeuds. Ainsi l'opérateur de prolongement n'est appliqué qu'aux noeuds "black" et s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (1.76)$$

**Opérateurs de restriction.** L'opérateur de restriction permet le transfert du résidu  $\mathbf{d}_h$  du niveau  $h$  vers le  $h-1$ , soit dans notre notation précédente  $H$  (cf. eq. 1.72). Le choix le plus simple pour  $\mathbf{R}$  l'opérateur de restriction, est une injection directe ("*straight injection*"), qui affecte à chaque noeud de la grille grossière la valeur de noeud équivalent de la grille fine, soit :  $\mathbf{R} = [1]$ . Cependant ce choix peut poser des difficultés dans la pratique. En effet, ne pas prendre en compte les noeuds directement adjacents peut aboutir à la perte d'une information locale et augmenter le temps de convergence, voire faire diverger la solution. Un choix plus judicieux est de prendre l'adjoint de l'opérateur de prolongement :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}. \quad (1.77)$$

On peut remarquer que  $\mathbf{R} = \frac{1}{4}\mathbf{P}^\dagger$ , ceci est généralement le cas lorsque  $\mathbf{R} = \mathbf{P}^\dagger$  et que  $H = 2h$ . Cet opérateur est appelé pondération complète ("*full weighting*"), cependant pour les mêmes raisons que lors du choix de l'opérateur de prolongement, nous utiliserons l'opérateur de demi-pondération ("*half weighting*") :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.78)$$

puisque en effet le résidu est nul en tout noeud noir.

#### 1.3.4.4. L' algorithme "*Full Multigrid*".

Les méthodes multigrilles décrites précédemment sont des méthodes itératives, qui réalisent plusieurs cycles (V-cycles, W-cycles, ...) pour obtenir une convergence vers la solution. Cependant, l'efficacité, du moins en termes de temps de calcul, peut être améliorée en construisant une méthode directe approchée : "*full multigrid*". Contrairement aux méthodes multigrilles classiques, l'algorithme "*full multigrid*" commence par le calcul de la solution exacte sur la grille la plus grossière. La première approximation est donc obtenue en interpolant la solution exacte vers une grille plus fine :

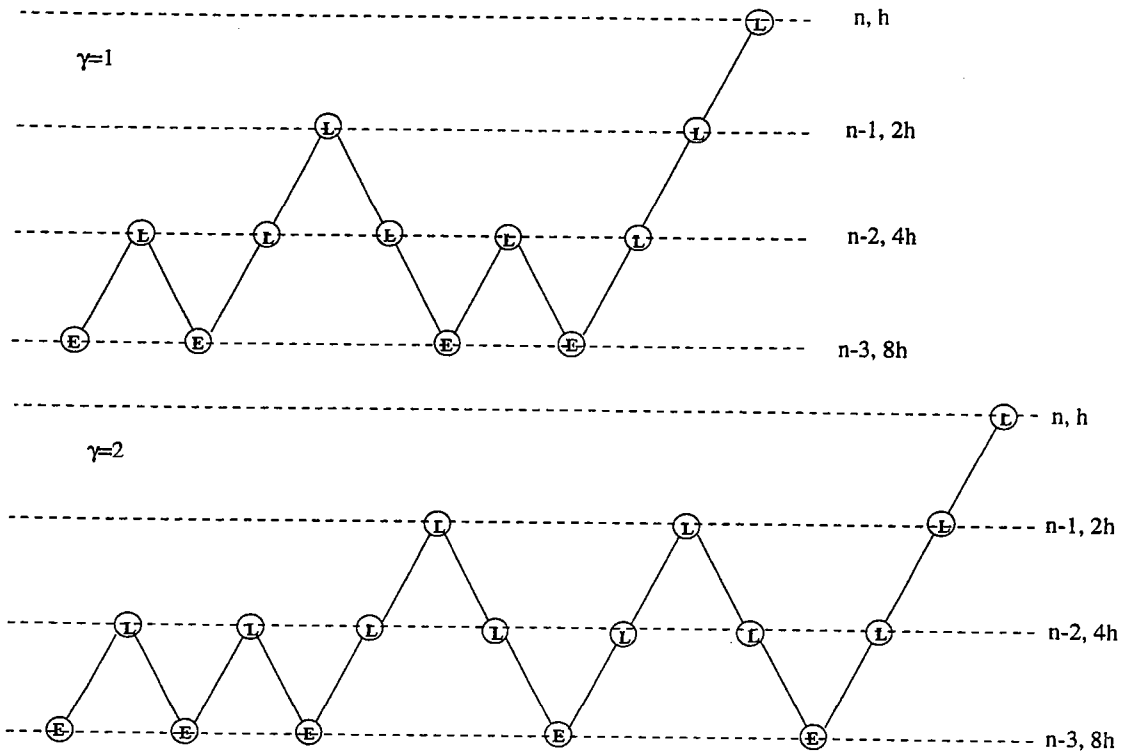


FIG. 1.8. — Structure des cycles pour la méthode "full multigrid" (FMG). Cette méthode commence sur le niveau le plus grossier, puis affine la solution vers des grilles plus fines par interpolation et lissage.

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_H. \quad (1.79)$$

La figure (1.8) décrit le schéma permettant d'aboutir à la solution sur la grille la plus fine. L'itération multigrille simple nécessitait de connaître le terme à droite ( $\mathbf{b}$ ) du système linéaire seulement sur la grille la plus fine, l'algorithme "full multigrid" a besoin de ce terme à tous les niveaux. Dans notre cas les conditions aux limites sont homogènes (problème de Dirichlet avec des conditions aux limites homogènes de Neumann) et donc on peut utiliser l'opérateur de restriction :

$$\mathbf{b}_H = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}_h. \quad (1.80)$$

Ainsi, progressivement, des solutions sur des grilles de plus en plus fines sont obtenues, avec également quelques itérations d'une méthode de relaxation entre chaque niveau de grille. Le critère d'arrêt étant le choix de la dimension de la grille (ce sera le nôtre) où l'erreur de troncature liée à la discrétisation. Ainsi cette méthode n'a pas de convergence au sens de celui des méthodes de relaxation, mais se comporte plutôt comme les méthodes directes. Ceci permet l'obtention très rapide d'une solution sur une grille de dimension élevée. A titre de comparaison avec le nombre total d'opérations élémentaires (tab. 1.1) (à ne pas confondre avec le nombre d'itérations, qui n'est en fait indicatif que pour des

méthodes possédant le même nombre d'opérations pour chaque itération) pour les méthodes multigrilles est  $\propto N^2$ .

### 1.3.5. Calcul de la solution exacte.

Le dernier point à aborder pour construire intégralement notre algorithme multigrille est le calcul de la solution exacte lorsque la dimension de la grille est suffisamment faible, pour pouvoir obtenir explicitement la matrice inverse  $A^{-1}$ . Dans le cas d'une grille homogène ( $N_x = N_y$ ), la dimension de la grille de conductivité la plus grossière est de  $2 \times 2$ , donc la matrice contenant les valeurs de potentiels électriques (aux noeuds de la grille de conductivité) possède une dimension  $3 \times 3$ . La matrice  $A$  sera ainsi de dimension  $9 \times 9$ , qui représente une taille raisonnable pour les techniques numériques de calcul de matrice inverse. Une fois  $A^{-1}$  obtenue, le calcul des potentiels électriques est trivial et donné directement par :

$$u_{i,j} = A^{-1} \cdot b_{i,j}. \quad (1.81)$$

Diverses techniques numériques existent pour inverser des matrices de cette taille : élimination de Gauss, décomposition LU. Cependant, dans certains cas ces méthodes ne sont pas viables, ceci parce que la matrice à inverser est singulière. La clause de singularité n'a pas besoin d'être bien définie mathématiquement. Effectivement, il suffit que numériquement le calcul des valeurs propres fournit une valeur proche de zéro, dépendant de la précision du processeur. Ce phénomène ne permet plus d'utiliser des méthodes comme l'élimination de Gauss ou la décomposition LU pour inverser la matrice. Pour résoudre ce problème la méthode de décomposition par valeurs singulières (ou *SVD*) est particulièrement bien adaptée. Cette méthode repose sur un théorème de l'algèbre linéaire qui stipule que toute matrice  $A$  de dimension  $M \times N$ , avec  $M \geq N$ , peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne orthogonale  $U$  de dimension  $M \times N$ , d'une matrice diagonale  $W$  de dimension  $N \times N$  avec des éléments nuls ou positifs (les valeurs singulières) et la transposée d'une matrice orthogonale  $V$  de dimension  $N \times N$  :

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V^T \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

Dans le cas où  $A$  est une matrice carrée,  $N \times N$ , les matrices  $U$ ,  $W$  et  $V$  sont également des matrices carrées de la même dimension. Les inverses de ces matrices sont triviales, puisqu'en effet les matrices  $U$  et  $V$  sont orthogonales donc leurs inverses sont égales à leurs transposées ;  $W$  étant diagonale, son inverse est une matrice diagonale donc les éléments de la diagonale sont les inverses des éléments  $\omega_j$ . Ainsi, à partir de l'équation (1.82), la matrice inverse de  $A$  s'écrit :

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} \cdot \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{\omega_j} \right) \right] \cdot \mathbf{U}^T. \quad (1.83)$$

Cette définition met parfaitement bien en évidence le problème des valeurs propres proches de zéro numériquement, puisqu'il est nécessaire de calculer l'inverse des valeurs propres. La solution proposée par cette méthode est de définir un seuil (fonction de la précision de l'ordinateur) au dessous duquel l'inverse de la valeur propre problématique n'est pas calculée mais directement affectée d'une valeur nulle. Cette astuce permet de construire des pseudo-inverse très rapidement et avec une grande robustesse. Le potentiel électrique (dans le domaine de Fourier) pour la grille la plus grossière est donc donné par :

$$\widetilde{\phi}_{u_y} = \mathbf{V} \cdot \left[ \text{diag} \left( \frac{1}{\omega_j} \right) \right] \cdot (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{b}). \quad (1.84)$$

### 1.3.6. Algorithme final.

Maintenant que tous les points nécessaires à l'élaboration finale de l'algorithme ont été abordés et définis, le schéma général de cet algorithme est présenté sur la figure (1.9). Comme il a été vu dans la section 1.2, notre approche de la résolution de l'équation de Poisson en 3-D, consiste à obtenir une série de champ électrique bi-dimensionnel dans le domaine de Fourier, dont le terme source est pondéré par un terme contenant la fréquence de Fourier. Une grande partie de l'information est contenue dans la fréquence nulle, ainsi nous apporterons un soin supplémentaire pour obtenir le champ électrique associé à cette fréquence.

La stratégie de calcul employée consiste à utiliser la méthode multigrille itérative avec  $n$  V-cycles pour obtenir le champ de potentiel en  $\lambda = 0$  puis à utiliser l'algorithme *Full Multigrid* pour chaque  $\lambda \neq 0$ . Ceci nous permet d'obtenir une solution itérative bien approchée pour le fréquence nulle et d'utiliser l'algorithme le plus rapide (méthode non-itérative) pour les fréquences moins représentatives (cf. § 1.2, Fig. (1.2)). En effet, bien que l'algorithme *Full Multigrid* soit extrêmement performant en terme de temps de calcul, les fonctions de lissage sont nettement moins utilisées que lors d'un V-cycle et donc les composantes hautes fréquences du signal peuvent soit ne pas être correctement résolues, soit faire diverger la solution. Afin d'éviter ce phénomène nous avons décidé d'opter pour un schéma itératif multigrille pour la fréquence nulle.

La procédure réalisant explicitement le calcul multigrille ( $\text{MG}(1, \mathbf{u}, \mathbf{f})$ ) est une procédure récursive, ce qui simplifie considérablement l'écriture de l'algorithme lorsque le langage employé le permet, de plus elle est utilisée lors d'un V-cycle et de la méthode *full-multigrid* sans aucune modification. C'est également une des raisons qui nous a poussé à choisir deux schémas différents des méthodes multigrilles : la simplicité d'implémentation des deux schémas lorsqu'un était déjà implémenté. La partie suivante présente le comportement de cet algorithme afin de le valider en comparant les résultats avec une solution analytique qui existe pour les milieux choisis. Une autre étude également incluse dans la partie suivante, permet de valider le principe général des algorithmes multigrilles, en présentant le potentiel

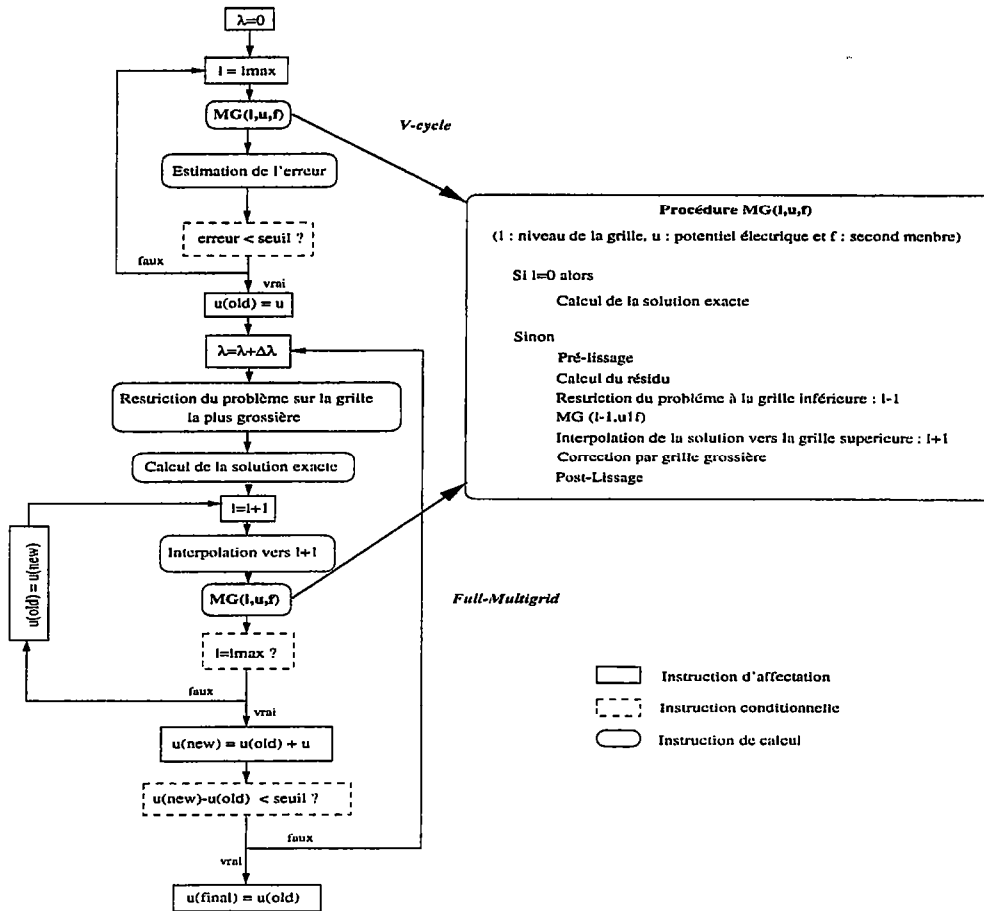


FIG. 1.9. – Représentation complète de l'algorithme utilisé pour la résolution du problème direct en 2-D<sup>1/2</sup>. vec :  $\lambda$  : longueur d'onde duale de la dimension  $y$ ,  $l$  : niveau de la grille,  $l_{\max}$  : niveau de la grille la plus fine,  $u$  : potentiel électrique et  $f$  : second membre.

secondaire pour des modèles de conductivités possédant des objets de différentes tailles, avec une résolution de plus en plus fine des composants hautes fréquences.

## 1.4. Validation.

### 1.4.1. Validation dans un demi-espace homogène.

La première validation que nous allons réaliser sera basée sur l'hypothèse d'un milieu homogène, permettant ainsi d'obtenir une solution analytique très simple. La base de notre algorithme étant de calculer des champs de potentiels électriques bi-dimensionnels (cf. §1.2), nous allons commencer par vérifier l'exactitude de ce calcul. Le champ de potentiel électrique dû à une paire d'électrodes 2-D (c'est-à-dire une ligne infinie selon  $y$ ) est donnée par [Mufti, 1976] :



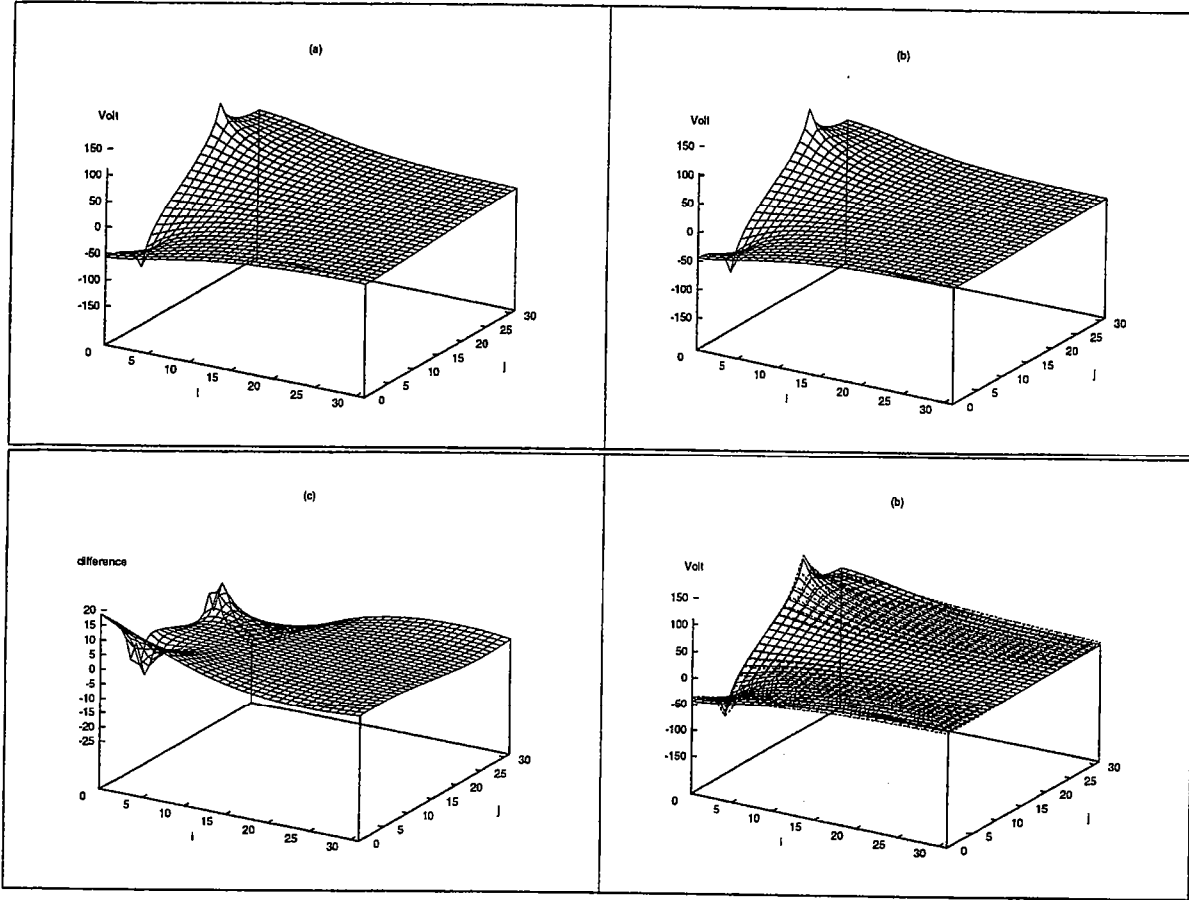


FIG. 1.10. – (a) Champ de potentiel 2D généré par un dipôle, solution analytique. (b) Champ de potentiel 2D généré par un dipôle, solution numérique. (c) Différence entre les graphes en %(a) et (b). (d) Superposition des graphes (a) et (b).

$$\phi(M(x, z)) = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \ln \left( \frac{\left(x + \frac{L}{2}\right)^2 + z^2}{\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + z^2} \right), \quad (1.85)$$

où  $I$  est l'intensité du courant injecté,  $\rho$  la résistivité du sous-sol et  $L$  l'écartement entre les deux lignes de courant (pour la figure (1.10) :  $I = 1 \text{ A}$ ,  $\rho = 100 \Omega.m$  et  $L = 16 \text{ m}$ ).

La figure (1.10) présente le calcul du champ de potentiel 2-D créé par un dipôle d'intensité  $1 \text{ A}$  dans un demi-espace homogène de résistivité  $100 \Omega.m$ . La solution numérique a une forme très proche de celle de la solution analytique (Fig. (1.10d)), cependant la représentation graphique de la différence entre les deux solutions (Fig. (1.10c)) montre une divergence de la solution numérique principalement sur les bords de la grille et près des singularités provoquées par les lignes d'injection de courant. Ces phénomènes courants en analyse numérique, notamment l'écart lié aux effets de bords, peuvent être résolus en calculant la solution sur une grille plus grande que le domaine étudié (cf. fig. 1.12). En effet, ce choix d'éloigner les bords de la zone d'étude permet de résoudre simplement les

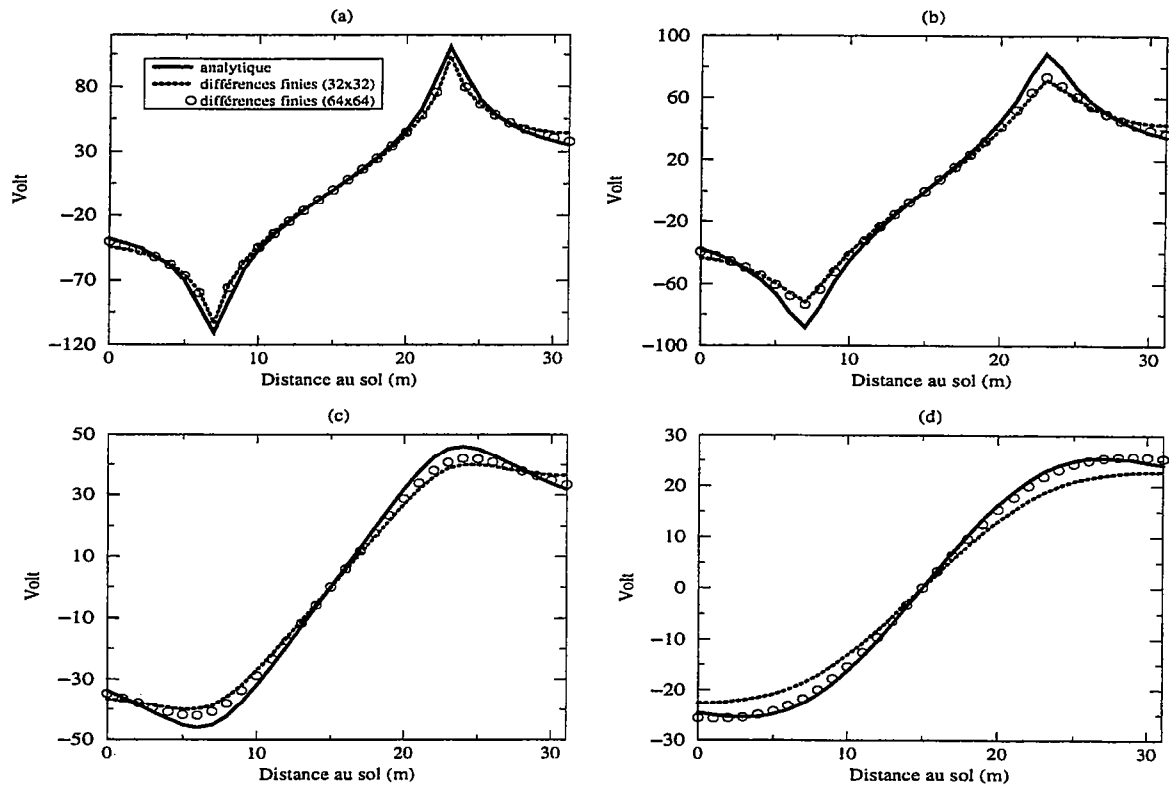


FIG. 1.11. – Distribution du potentiel électrique, correspondant à des profils réalisés à différentes profondeurs de la figure (1.10). La courbe en trait plein représente le potentiel électrique bi-dimensionnel obtenu analytiquement, la courbe en pointillé montre le potentiel électrique obtenu numériquement sur une grille de dimension  $32 \times 32$  et les cercles, le potentiel électrique sur une grille  $64 \times 64$ . (a) Profil à 1m de profondeur, (b) profil à 2 m, (c) profil à 5 m et (d) profil à 10 m.

artefacts générés par les conditions aux limites, qui restent toujours très délicates à définir, et parfois à justifier.

La figure (1.11) montre des profils de potentiels électriques obtenus d'après une formule analytique (courbe en trait plein) et par une méthode numérique (courbe en pointillé et cercles), en fait il s'agit simplement de coupes des figures (1.10). La courbe en pointillé, calculée numériquement, est obtenue sur un grille de la dimension du domaine étudié (soit dans notre cas :  $32 \times 32$ ). On remarque que la divergence s'accroît assez rapidement avec la courbe analytique lorsque l'on s'éloigne des sources et que l'on se rapproche des bords de la grille. Cependant, les courbes représentées par des cercles et correspondant à un calcul identique mais avec une grille de modélisation d'une dimension  $64 \times 64$  ne montrent pas une telle divergence sur le même secteur étudié. En général, une marge égale au quart de la longueur de la grille suffit à atténuer fortement les effets de bords. Bien évidemment cette marge n'a pas besoin d'être aussi bien résolue que le secteur d'étude, puisqu'elle ne sert qu'à réduire des artefacts de calcul liés aux conditions aux limites. Ainsi comme il est schématisé sur la figure (1.12), la taille des mailles de la grille de modélisation augmente

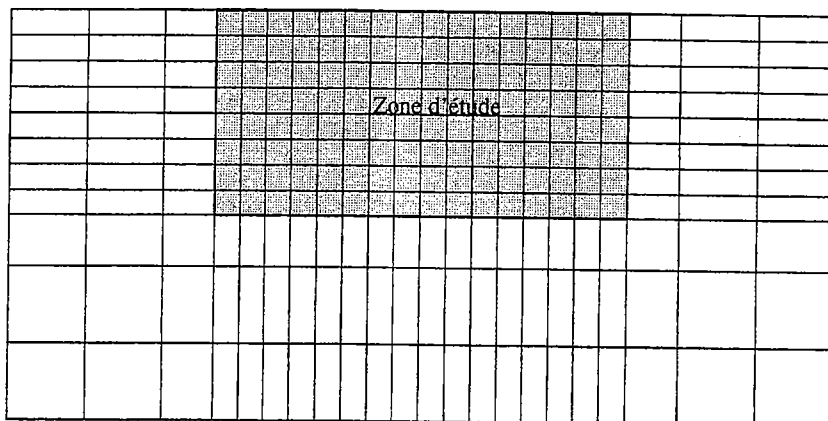


FIG. 1.12. — Exemple de grille de modélisation utilisée lors de la résolution du problème direct. L'extension de la grille (zone blanche) permet de s'affranchir des effets de bords. Le modèle de résistivité est représenté par la zone grisée.

avec l'éloignement de la zone de la grille étudiée. Ceci dans l'optique de ne pas faire croître de manière trop importante le temps de calcul du problème direct. Au final nous obtenons une solution numérique du champ de potentiel électrique qui est correctement en accord avec la solution analytique, ceci dans un milieu bi-dimensionnel. Nous allons maintenant valider l'approche 2-D<sup>1/2</sup>.

Comme il a été déjà dit l'approche utilisée pour calculer le champ de potentiel tri-dimensionnel dans une symétrie 2-D<sup>1/2</sup> consiste en premier lieu à obtenir le champ de potentiel 2-D en  $y = 0$  soit dans le domaine de Fourier en  $\lambda = 0$  (où  $\lambda$  est la longueur d'onde duale de la dimension  $y$ ), puis pour les toutes les autres fréquences représentatives. La figure (1.13) présente le même type de résultat que la figure (1.10) pour un champ de potentiel 3-D. Les électrodes sont donc bien assimilées à des sources tri-dimensionnelles et plus précisément à un point source. Le champ de potentiel analytique est obtenu à partir de l'équation classique du potentiel électrique généré par un dipôle dans un demi-espace homogène (cf § 1.2, équation (1.24)). nous nous intéresserons uniquement au cas  $y = 0$ , puisque nous voulons uniquement connaître la valeur du champ de potentiel sous la ligne définie par les électrodes, et donc l'équation (1.24) se ramène à :

$$\phi(M(x, y = 0, z)) = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - L)^2 + z^2}} \right). \quad (1.86)$$

Les valeurs de  $I$ ,  $\rho$  et  $L$  sont les mêmes que pour les calculs présentés sur la figure (1.10). La figure (1.13) permet de remarquer le bon accord entre la solution analytique et le solution numérique obtenue dans une hypothèse 2-D<sup>1/2</sup>. Contrairement aux potentiels obtenus en 2-D, les effets de bords paraissent beaucoup moins important (fig. (1.13c) et (1.13d)), ceci peut être directement lié à la nature même du champ de potentiel électrique, en effet celui-ci décroît nettement plus rapidement si on considère une source tri-dimensionnelle. Ainsi la divergence due aux effets de bords devient plus rapidement négligeable. Cependant le graphe (1.13c) montrant la différence entre le champ potentiel analytique (calculé à partir

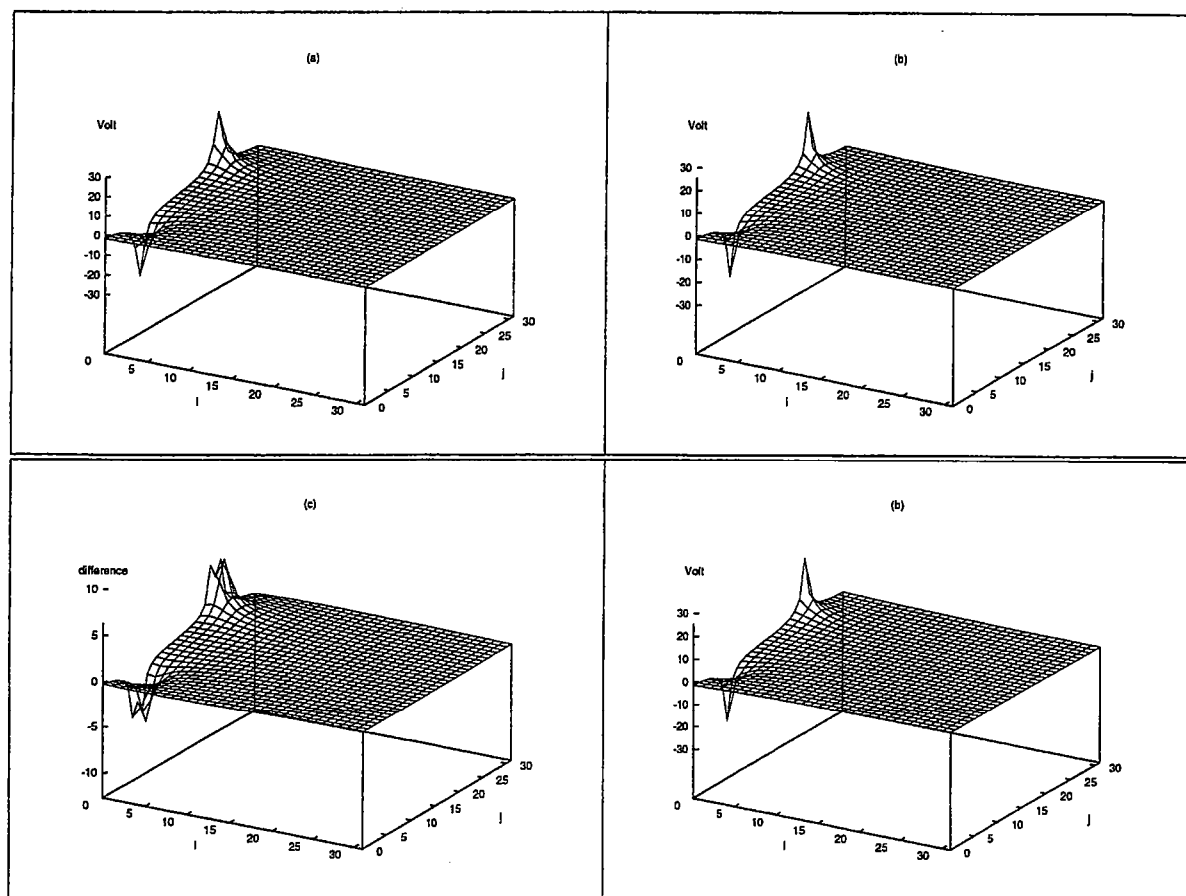


FIG. 1.13. – (a) Champ de potentiel 3-D généré par un dipôle, solution analytique. (b) Champ de potentiel 3-D généré par un dipôle, solution numérique en  $2-D^{1/2}$ . (c) Différence entre les graphes en % (a) et (b). (d) Superposition des graphes (a) et (b).

de 1.86) et le champ de potentiel numérique permet de signaler la même divergence proche des positions des électrodes (où du dipôle électrique). En effet, d'après (1.86) le potentiel électrique tend vers 0 aux points sources. Cependant cette singularité est très difficile à gérer numériquement. Ainsi, il est relativement normal d'observer une divergence des solutions numériques et analytiques à ces points. Cependant, malgré ces effets de bords et de singularité, la corrélation entre les deux graphes restent relativement bonne (cf. fig. (1.13d)).

#### 1.4.2. Validation de l'algorithme pour des milieux non homogènes.

Afin de tester la résolution du modèle direct sur des modèles de terrain un peu plus complexes, nous allons étudier un modèle de terre non uniforme variant latéralement (Fig. (1.14)). Le plan définissant la limite sol-atmosphère est situé en  $z = 0$ , l'axe  $z$  étant positif vers le bas. Les axes  $x$  et  $y$  sont placés dans le plan définissant la limite sol-air, avec

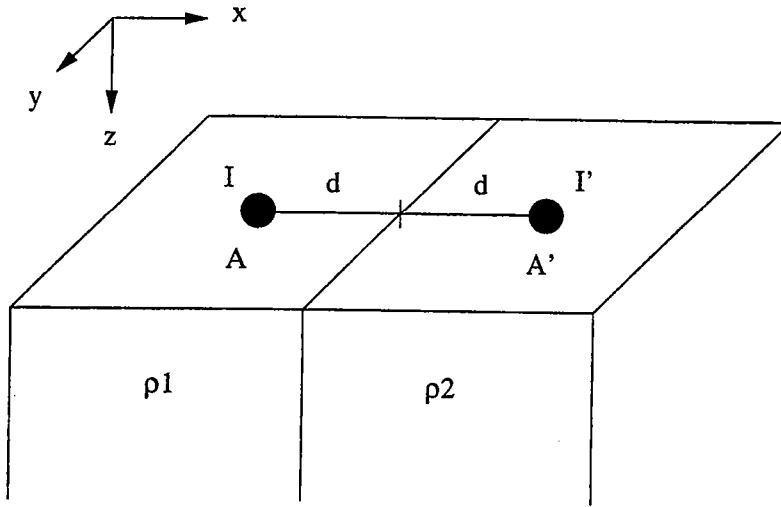


FIG. 1.14. – Modèle de terrain consistant en deux compartiments de résistivité différentes séparées par une faille verticale. Le courant est injecté par un simple point source A à une distance  $d$  de la faille. A' étant l'image de A. L'origine du repère cartésien est placé en A.

l'axe  $y$  parallèle au plan séparant les deux compartiments. L'origine du repère cartésien est située au point A, source d'injection du courant d'intensité  $I$ . La limite entre les deux compartiments se situe à  $x = d$ .

Le méthode des images est alors appliquée au problème afin d'aboutir à une solution relativement simple [Zhdanov and Keller, 1994]. Le potentiel électrique peut alors s'écrire dans le compartiment de gauche sur la figure (1.14) :

$$U^{(1)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \left( \frac{1}{r} + \frac{K_{12}}{r'} \right), \quad (1.87)$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $r' = \sqrt{(2d - x)^2 + y^2 + z^2}$  et  $K_{12}$  est le coefficient de réflexion de Kelvin défini par :

$$K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (1.88)$$

Le champ de potentiel généré dans le compartiment de droite peut se définir par :

$$U^{(2)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \left( \frac{1 + K_{12}}{r} \right). \quad (1.89)$$

L'expression du potentiel électrique dans le plan  $y = 0$  s'écrit alors :

$$U^{(1)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{K_{12}}{\sqrt{(2d - x)^2 + z^2}} \right), \quad (1.90)$$

$$U^{(2)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \left( \frac{1 + K_{12}}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right). \quad (1.91)$$

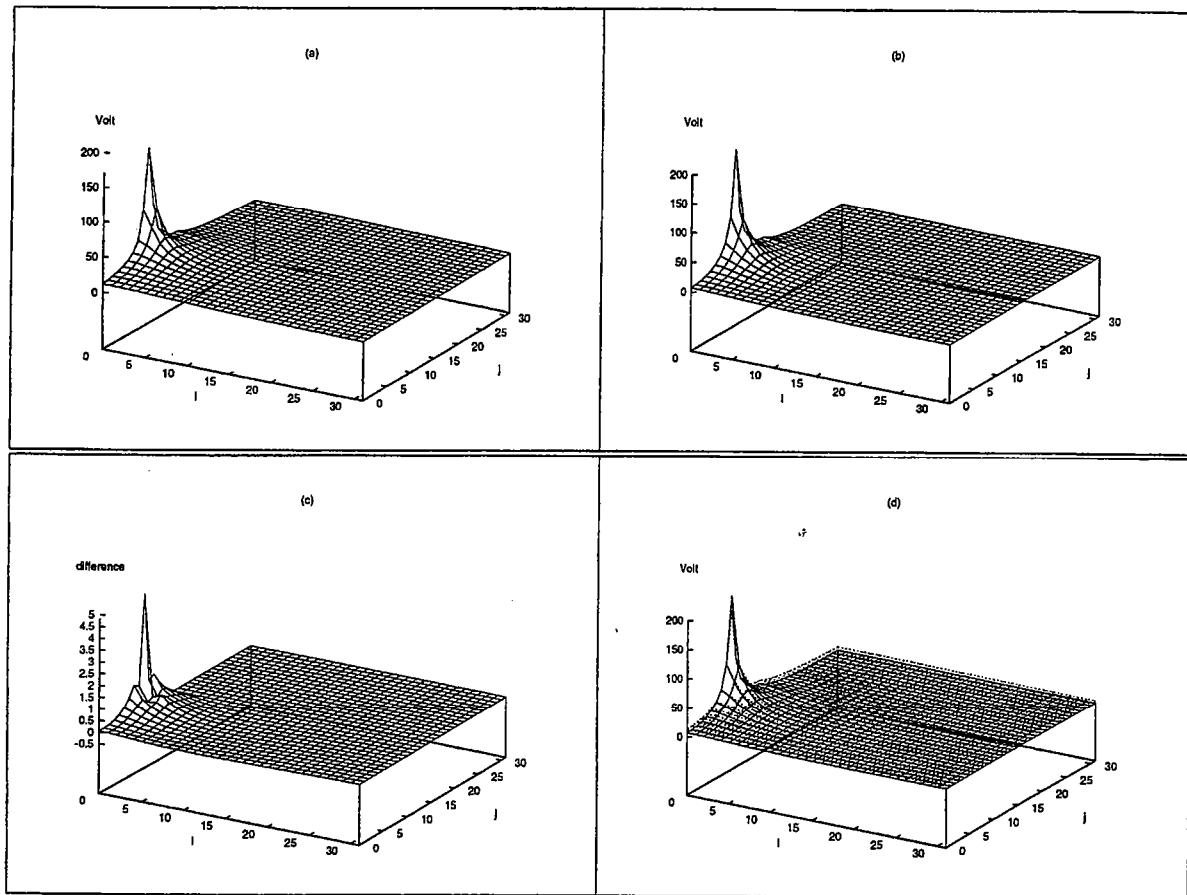


FIG. 1.15. — (a) Champ de potentiel 3-D généré par un point source près d'un plan séparant deux régions de résistivités différentes, solution analytique. Le compartiment haut possède une résistivité élevée ( $10\,000\ \Omega.m$ ), celui du bas à une résistivité de  $100\ \Omega.m$ . (b) Idem (a) pour la solution numérique en  $2-D^{1/2}$ . (c) Différence entre les graphes en % (a) et (b). (d) Superposition des graphes (a) et (b).

Afin de tester l'algorithme de résolution du problème direct, deux types de milieu ont été utilisés :

- Un milieu où la source est dans le milieu le plus conducteur, la faille simulant une interface entre deux compartiments possédant une résistivité différente de deux ordres de grandeurs ( $100\ \Omega.m$  et  $10\,000\ \Omega.m$ ). Ce type de contact peut se rencontrer entre une roche métamorphique et un environnement sableux par exemple.
- Un milieu où la source est dans la zone la moins conductrice, l'écart entre la résistivité des deux compartiments est de 4 ordres de grandeurs ( $100\ \Omega.m$  et  $0.01\ \Omega.m$ ). Cette interface peut simuler le contact avec une zone fortement métallisée ou un secteur très hydromorphe possédant une bonne mobilité ionique.

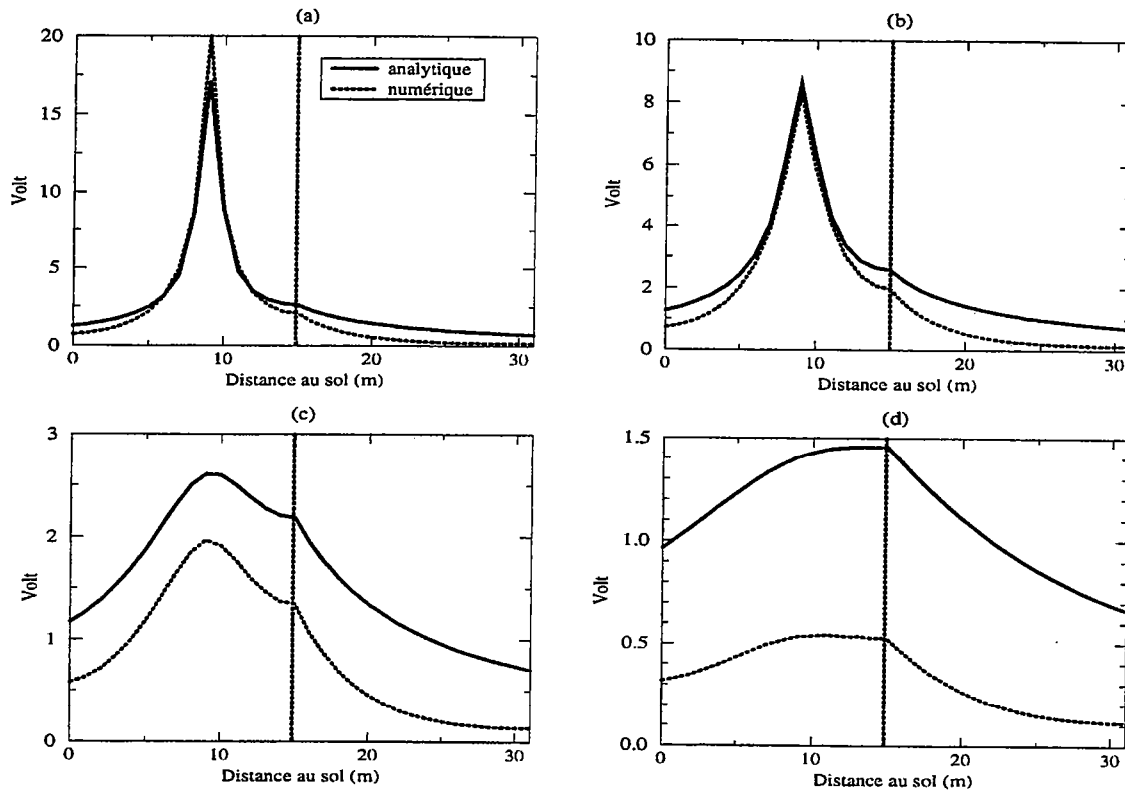


FIG. 1.16. – Distribution du potentiel électrique, correspondant à des profils réalisés à différentes profondeurs de la figure (1.15). La courbe en trait plein représente le potentiel électrique tri-dimensionnel obtenu analytiquement, la courbe en pointillé montre le potentiel obtenu numériquement sur une grille de dimension  $32 \times 32$ . (a) Profil à 1m de profondeur, (b) profil à 2 m, (c) profil à 5 m et (d) profil à 10 m.

#### 1.4.2.1. Interface présentant un gradient positif pour les lignes de courant :

La figure (1.15) montre les champs de potentiels électriques obtenus par les formules analytiques et la résolution numérique. La grille utilisée est de dimension  $32 \times 32$  avec un pas de maille de 1m. Les résistivités  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont respectivement égales à  $100 \Omega \cdot m$  et  $10\,000 \Omega \cdot m$ . L'intensité du courant est de 10 A.

Le graphe 1.15c, représentant la différence entre les graphes 1.15a et 1.15b, montre, comme sur les figures 1.10 et 1.13, des divergences au point source liées à la singularité du lieu d'injection de courant. La forme générale de la distribution du potentiel électrique semble bien reproduite, notamment aux environs de la discontinuité, puisqu'en effet les équipotentielles montrent une dissymétrie par rapport au point source qui est directement liée à la présence de l'interface.

En présence d'un milieu plus résistant les équipotentielles ont tendance à s'en rapprocher, dans le cas de notre modèle elles tendent donc à se perpendiculariser à l'interface, ce qui explique la forme de rebond qu'elles présentent près de la discontinuité. Ce phénomène est bien reproduit lors de la résolution numérique.

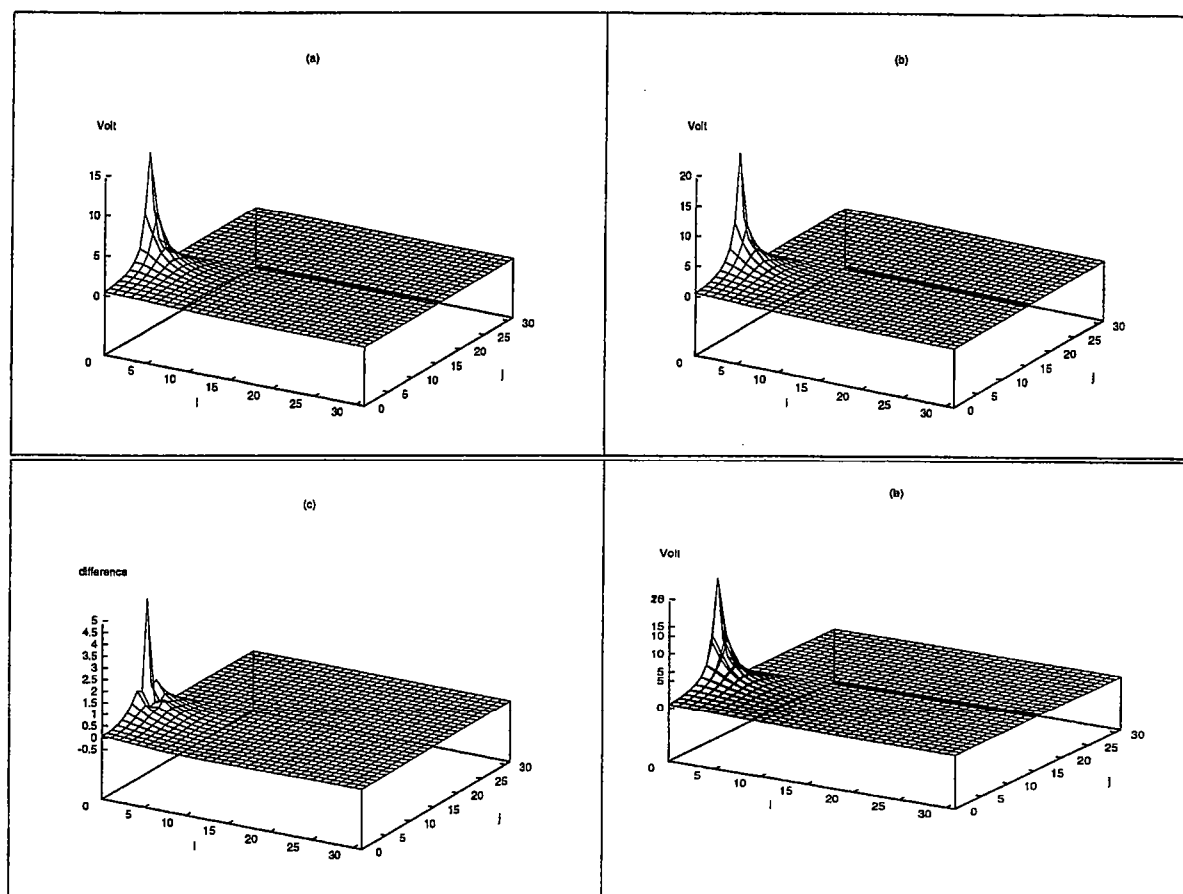


FIG. 1.17. — (a) Champ de potentiel 3-D généré par un point source près d'un plan séparant deux régions de résistivités différentes, solution analytique. Le compartiment haut possède une faible résistivité ( $0.01 \Omega.m$ ), celui du bas à une résistivité de  $100 \Omega.m$ . (b) Idem (a) pour la solution numérique en  $2-D^{1/2}$ . (c) Différence entre les graphes (a) et (b). (d) Superposition des graphes (a) et (b).

Cependant des profils réalisés à différentes profondeurs (Fig. (1.16)) montrent un écart significatif des valeurs de potentiel obtenues numériquement par rapport aux valeurs analytiques. En effet, l'allure des profils est bien reproduit, mais les faibles écarts qui existaient lors des tests sur un modèle simple (demi-espace homogène, cf. fig. (1.11)) se trouvent amplifiés.

#### 1.4.2.2. Interface présentant un gradient négatif pour les lignes de courant :

Les figures (1.17) et (1.18) présentent les distributions et les profils de potentiels électriques dans le cas d'un point source situé dans le milieu le plus résistant. Les paramètres de modélisation (intensité de courant, dimension de la grille ...) sont les mêmes que précédemment, excepté la valeur de résistivité du compartiment de droite qui est égale à  $0.01 \Omega.m$ .

Les graphes de la figure (1.17) montrent une bonne représentation de la forme de



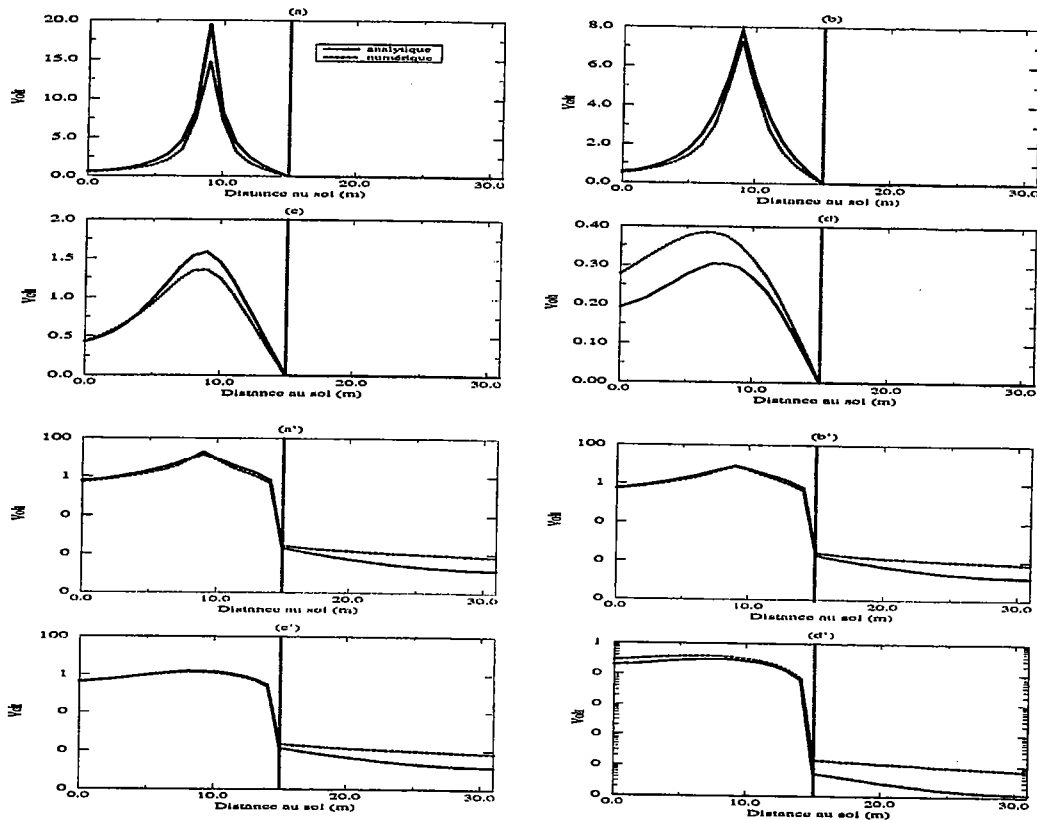


FIG. 1.18. – Distribution du potentiel électrique, correspondant à des profils réalisés à différentes profondeurs de la figure (1.17). La courbe en trait plein représente le potentiel électrique tri-dimensionnel obtenu analytiquement, la courbe en pointillé montre le potentiel obtenu numériquement sur une grille de dimension  $32 \times 32$ . (a) Profil à 1m de profondeur, (b) profil à 2 m, (c) profil à 5 m et (d) profil à 10 m. Les graphes (a'), (b'), (c') et (d') sont réciproquement identiques aux graphes (a), (b), (c) et (d) mais avec une échelle logarithmique pour l'axe  $y$ .

la distribution du champ de potentiel électrique numérique (graphe 1.17b) par rapport au champ de potentiel calculé analytiquement (graphe 1.17a). De la même manière que précédemment le comportement à proximité de la discontinuité est correctement reproduit. En effet, en présence d'un milieu conducteur les équipotentielles tendent à se paralléliser à l'interface. Ce phénomène est visible sur le graphe montrant les équipotentielles du champ (Fig. 1.17d).

Cependant, l'étude de profils réalisés à différentes profondeurs (Fig. 1.18) montre quelques divergences, d'amplitudes un peu moins faibles que précédemment mais certainement dû également à un phénomène d'amplification des approximations numériques dans le cas de contraste important de résistivité.

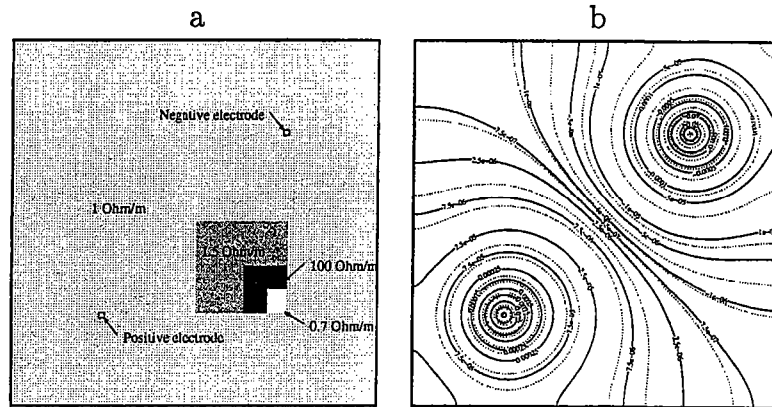


FIG. 1.19. – (a) Modèle de résistivité, avec 3 blocs encastrés. Le milieu ambiant est de  $1 \Omega.m$ , et les 3 blocs possèdent respectivement une résistivité de  $1,5 \Omega.m$ ,  $100 \Omega.m$  et  $0,7 \Omega.m$ . (b) Champ de potentiel électrique pour un positionnement des électrodes identiques à la figure (a) mais dans le cas d'un milieu de résistivité homogène de  $1 \Omega.m$ , ce champ représente le potentiel électrique primaire.

### 1.4.3. Évolution du potentiel secondaire.

L'étude du potentiel électrique secondaire paraît être relativement bien adaptée pour étudier le comportement de l'algorithme de résolution du problème direct, et plus spécifiquement lors du changement d'échelle. C'est-à-dire lorsque des détails invisibles à l'échelle (ou à la dimension de grille) inférieure deviennent résolubles et, donc, sont incorporés à la solution. En effet, le potentiel électrique secondaire apparaît lors d'une formulation de l'équation de Poisson *via* une intégrale de surface et les formules de Green. Il est alors directement associé à une intégrale qui met en évidence la relation entre la distribution de résistivité et les accumulations de charge, tandis que le potentiel primaire ne fournit aucune information sur la distribution de résistivité, mais uniquement localement près des électrodes. Ainsi il est correctement estimé par le champ de potentiel électrique d'un milieu homogène (cf. fig. 1.19b).

Afin d'exprimer le champ de potentiel électrique en termes d'équations intégrales, nous allons considérer un espace homogène de conductivité  $\sigma$  contenant plusieurs inhomogénéités de conductivités  $\sigma_i$ , pour lequel les fonctions de Green sont connues. Dans cette situation, l'équation de Poisson (eq. 1.17, p. 12) peut être réécrite :

$$-\nabla^2 \phi = -\frac{\nabla \sigma}{\sigma} \cdot \nabla \phi + \frac{I}{\sigma} \delta(r_m - r_i), \quad (1.92)$$

où  $r_m$  désigne le point de mesure et  $r_i$  le point source d'intensité de courant  $I$ . En utilisant le théorème d'Helmholtz [Morse and Feshbach, 1953] nous pouvons définir une solution pour le potentiel électrique  $\phi$  en terme d'intégrale avec les fonctions de Green appropriées  $G(r, r')$ . Ainsi nous obtenons :

$$\phi(r_m | r_i) = \frac{I(r_i)}{4\pi} \int_V \frac{\delta(r - r_i)}{\sigma} G(r, r_i) dv - \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\nabla \sigma}{\sigma} \cdot \nabla \phi \right] G(r, r_i) dv, \quad (1.93)$$

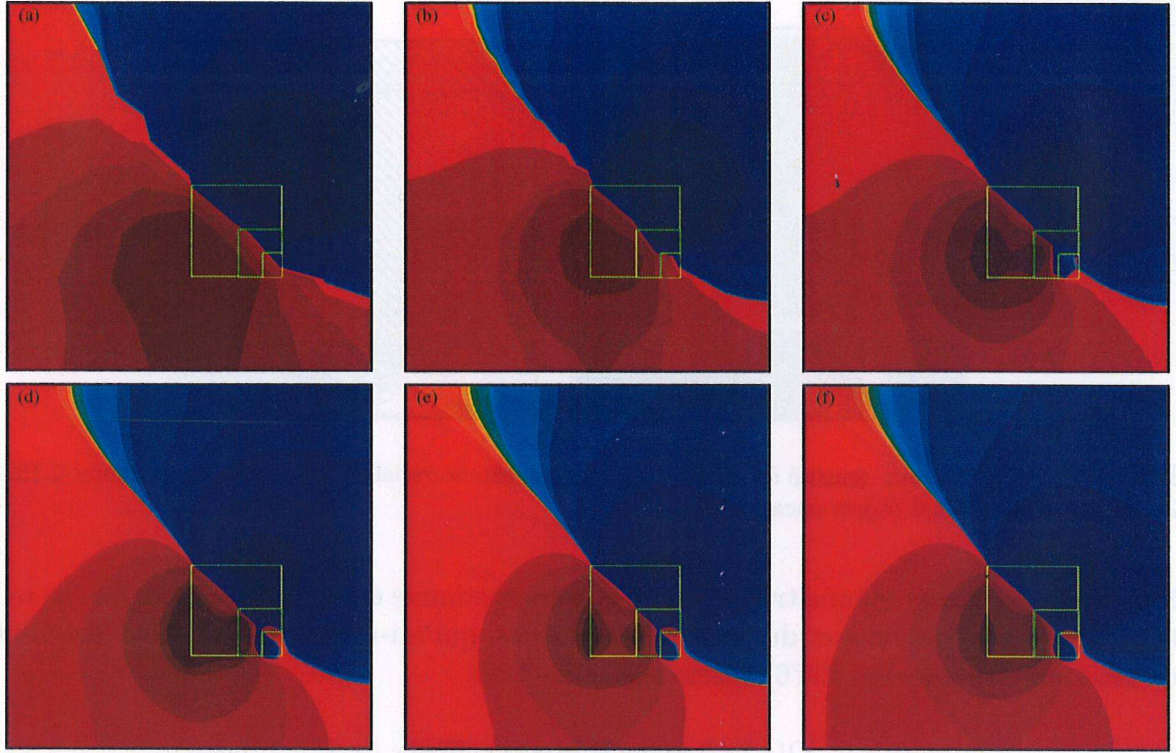


FIG. 1.20. – Potentiel secondaire pour les différents niveaux de grilles. De la grille (a) vers la grille (f), la dimension varie de  $4 \times 4$  à  $256 \times 256$ .

la fonction de Dirac  $\delta(r - r_i)$  étant définie par la relation :

$$\int f(r) \delta(r - r_i) dr = f(r = |r_i|). \quad (1.94)$$

Le premier terme du membre de gauche de l'équation (1.93) peut s'exprimer plus simplement en faisant disparaître l'intégrale, mais ne fournit aucune information sur la distribution de conductivité  $\sigma$  excepté au point  $r_i$ . C'est ce que nous appellerons le potentiel primaire, il est dû directement à la physique induite par l'injection de courant. Le second terme, que nous appellerons le potentiel secondaire est relié à la distribution des charges, laquelle est nulle partout sauf aux limites des hétérogénéités. Ainsi ce terme peut se réécrire comme étant le produit d'une densité de charge volumétrique équivalente (que nous noterons  $Q$ ) et d'une fonction de Green :

$$\phi(r_m | r_i) = \frac{I(r_i)}{4\pi\sigma(r_i)} \cdot G(r, r_i) - \frac{1}{4\pi} \int_V Q(r | r_i) \cdot G(r, r_i) dv. \quad (1.95)$$

Le cas particulier de la géométrie de l'espace homogène permet d'expliciter facilement la fonction de Green, qui s'écrit simplement :

$$G(r, r_m) = \frac{1}{|r - r_m|}. \quad (1.96)$$



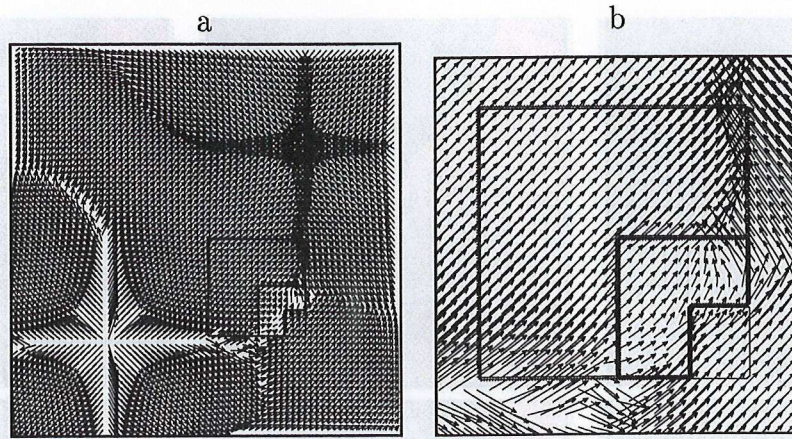


FIG. 1.21. – (a) Vecteur densité de courant pour le modèle de résistivité présenté sur la figure 1.19a. (b) Zoom sur la zone des 3 objets encastrés.

La densité de charge volumétrique peut s'exprimer comme étant fonction à la fois de la distribution de conductivité et du potentiel électrique, qui lui-même dépend de la distribution de conductivité [Snyder, 1976]. Cette relation s'écrit :

$$Q(r | r_i) = 2\varepsilon_o \nabla \ln \sigma(r) \cdot \nabla \phi(r | r_i). \quad (1.97)$$

Donc, si nous remanions l'équation de Poisson (eq. 1.17, p. 12) en termes d'équation intégrale en utilisant le formalisme des fonctions de Green, le potentiel induit par un point source localisé au point  $r_i$  et mesuré au point  $r_m$  est donné par :

$$\phi(r_m | r_i) = \frac{I(r_i)}{2\pi\sigma(r_i)|r_i - r_m|} + \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{\nabla \ln \sigma(r) \cdot \nabla \phi(r | r_i)}{|r - r_m|} dv. \quad (1.98)$$

Il apparaît que le potentiel secondaire est directement lié aux concentrations des charges électriques sur les bords des hétérogénéités, c'est pourquoi nous allons nous intéresser à son évolution pendant une remontée d'un cycle de l'algorithme multigrille (cf. fig. (1.6), p. 27). Le modèle de conductivité utilisé (fig. 1.19a) présente plusieurs hétérogénéités de tailles différentes afin d'observer les détails incorporés progressivement au potentiel secondaire lors des résolutions successives de grilles de plus en plus fines. Le potentiel primaire étant correctement représenté par une simulation sur un milieu homogène (de conductivité de 1 S/m (ou de résistivité de 1  $\Omega.m$ ), (fig. (1.19b)), il est donc facile de le soustraire au champ de potentiel électrique total.

La figure (1.20) présente donc le potentiel électrique secondaire pour les grilles dont la dimension varie de ( $N=8 \times 8$ ) à ( $N=256 \times 256$ ). Il apparaît clairement que de plus en plus de détails fins sont incorporés à la solution, et que les valeurs maximales sont situées près des bords des objets, et bien évidemment près des bords que le courant électrique traverse plus ou moins perpendiculairement. Sur les bords où les vecteurs de courant électriques ont tendance à se paralléliser (cf. fig. 1.21), le potentiel électrique secondaire est nettement plus faible.



La figure (1.22) présente également le potentiel électrique secondaire pour trois autres modèles plus simples de conductivité et pour une position des électrodes d'injection de courant différente.

## 1.5. Conclusion.

Comme c'est souvent le cas lors de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, nous nous sommes attachés à trouver les meilleurs compromis lors de l'analyse numérique du problème direct afin de satisfaire au maximum les propriétés requises pour notre méthode d'interprétation. L'un de ces besoins était les performances en termes de temps de calcul. En effet, cette résolution du problème direct sera effectuée de nombreuses fois lors de l'interprétation de données électriques afin de vérifier la validité de nos modèles de résistivité. Sur ce point, il semble que notre choix d'une méthode multigrille ait été pertinent, puisque le nombre d'opérations nécessaires est proportionnel au carré de la dimension de la grille (si celle-ci est carré), soit nettement moins que les méthodes directes ou de relaxation. Le gain en terme de temps de calcul est d'environ d'un ordre de grandeur.

La seconde propriété nécessaire est une résolution numérique tri-dimensionnelle, afin de réaliser une inversion tri-dimensionnelle. L'hypothèse d'un milieu invariant selon une dimension pouvait paraître inadaptée. En effet, dans le cas d'étude de sub-surface, le milieu est souvent considéré, à juste titre, comme étant fortement hétérogène. Cependant cette hypothèse permet également de considérer plusieurs caractéristiques tri-dimensionnelles du phénomène physique. En premier lieu, les électrodes sont pleinement considérées comme des points sources, et non comme des lignes de courant. Deuxièmement, la modification du terme source, liée à la reformulation de l'équation de Poisson *via* l'espace de Fourier, permet d'intégrer certaines propriétés tri-dimensionnelles du milieu. Ceci permet d'aboutir à une résolution du problème direct dont le respect des propriétés tri-dimensionnelles du milieu est suffisant pour aborder le problème inverse avec des données électriques réelles et donc une inversion 3-D.

Une des dernières qualités dont on peut être en droit de demander à une méthode numérique est d'obtenir les bons résultats, c'est ce qui explique toute la partie de validation de ce chapitre. En effet, certains milieux permettent d'obtenir des solutions analytiques du champ de potentiel électrique et donc ces modèles sont des pièces de choix pour comparer les résultats analytiques et numériques. Ces comparaisons ont permis de mettre en évidence les artefacts liés aux effets de bords, qui dans toute modélisation numérique est toujours délicat à gérer. Notre choix, d'une marge de "*sécurité*", est relativement simple, et permet de s'affranchir de ces effets sans pour autant nécessiter le développement d'une justification physique. Ainsi les résultats numériques de calcul du potentiel électrique sont en relativement bon accord avec les solutions analytiques.

Le dernier point abordé a permis de mettre en évidence un comportement physique de la méthode de résolution multigrille en parfait accord avec la physique des phénomènes électriques. En effet, une reformulation de l'équation de Poisson *via* des équations d'intégrales met en évidence l'existence de deux potentiels électriques : l'un, le potentiel primaire,



contrôlant le phénomène d'injection au sens strict ; l'autre, le potentiel secondaire, décrivant les accumulations de charges électriques aux bords des diverses hétérogénéités du milieu et donc contrôlant l'information sur la distribution de résistivité. La résolution correcte de ce potentiel électrique secondaire est donc très importante, puisque c'est lui qui fournit l'information sur la distribution de résistivité et donc sur la structure du sous-sol. Les résultats obtenus permettent de vérifier la puissance et la résolution par intégration progressive des fréquences des méthodes multigrilles, ainsi que de mettre en évidence le rôle et l'exactitude du potentiel secondaire calculé.

Cette étude terminée, la suite logique est d'aborder la résolution du problème inverse afin d'aboutir à une méthode complète d'interprétation des données de résistivité électrique. Cependant, il était nécessaire d'aboutir à une méthode de résolution du problème direct performante et fiable.



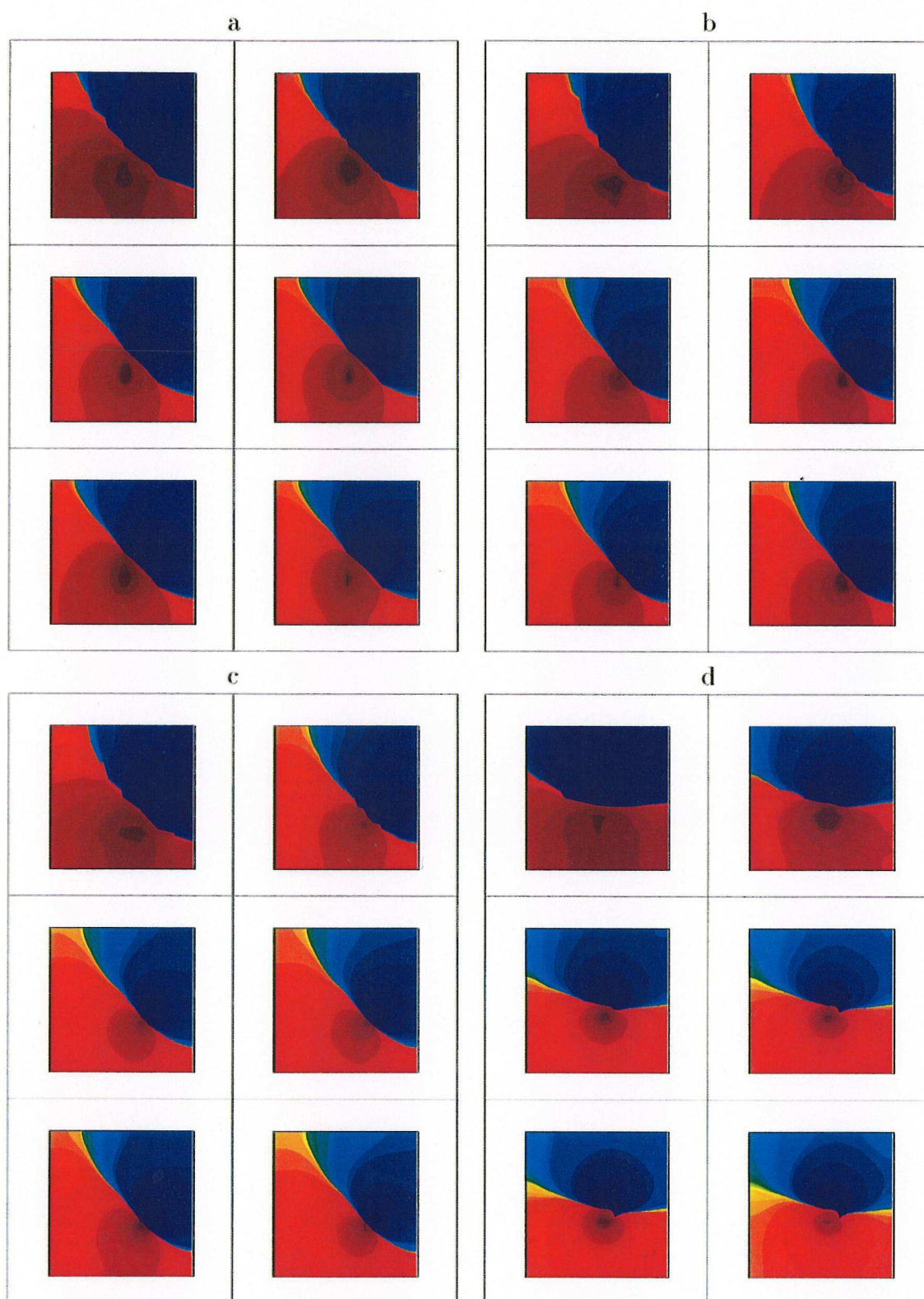


FIG. 1.22. – (a) Potentiel secondaire d'un modèle de résistivité identique à la figure 1.20a, mais avec seulement le plus gros bloc. (b) Idem (a) mais avec 2 blocs. (c) Idem (a) mais avec seulement le plus petit bloc. (d) Potentiel secondaire d'un modèle de résistivité ne possédant qu'un bloc au centre et dont les électrodes sont situés au centre des parties supérieures et inférieures.





## 2. Problème inverse.

### 2.1. Introduction.

Le problème direct consiste à obtenir le champ de potentiel électrique à partir de la distribution de conductivité  $\sigma(x, y, z)$ , le problème inverse définit la transformation inverse : à partir du champ de potentiel électrique, on veut obtenir la distribution de conductivité (fig. (2.1)). Deux espaces sont identifiés : l'espace des modèles (ou des solutions) qui représente l'espace dans lequel sont définis tous les modèles possibles, en l'occurrence ce sont des modèles de distribution de conductivité, et l'espace des données, dans notre cas ce sont les mesures de potentiel électrique.

Dans la plupart des problèmes inverses, et notamment dans le cas des champs de potentiel, le modèle à déterminer est une fonction dense de  $(x, y, z)$  possédant beaucoup de degrés de liberté. Or, lors d'expériences et d'études de terrain, les acquisitions de données ne permettent d'obtenir que des séries de données finies pour la détermination du modèle et une simple série de mesures ne fournit pas suffisamment d'informations pour construire un modèle unique ([Backus and Gilbert, 1967] ; [Parker, 1994]). Ainsi, le fait que les expériences réalistes fournissent des séries finies de données pour reconstruire un modèle qui possède un nombre infini de degrés de liberté signifie que le problème inverse n'a pas de solution unique au sens où plusieurs modèles peuvent expliquer les données. Le modèle obtenu par l'inversion des données mesurées expérimentalement ne sera donc pas nécessairement le vrai modèle recherché. Cette non-unicité des solutions du problème inverse rend caduque les théories d'inversion exacte (par ex. l'inversion de Herglotz-Wiechert en sismologie) dans la majorité des cas d'études et, notamment, celles concernant des milieux géophysiques comme la subsurface qui possède une forte hétérogénéité et anisotropie des paramètres physiques étudiés. Un autre problème, intervenant lors de l'acquisition des données, peut limiter fortement l'information contenue dans les mesures : le bruit qui peut être de diverses origines et qu'il est parfois très difficile de contrôler : l'environnement de la zone d'étude, les capteurs, les appareils de mesures ...

La seconde difficulté importante rencontrée lors de la résolution du problème inverse est la non-linéarité. Dans la réalité, la plupart des phénomènes physiques rencontrés sont fortement non-linéaires. La première approche employée pour s'affranchir de cette non-linéarité des équations a été de linéariser le problème par une approximation. Ainsi, en sismologie, le principe de Rayleigh est une approximation à la base de l'étude de la structure de l'intérieur de la Terre ou encore le principe de Fermat pour la tomographie sismique

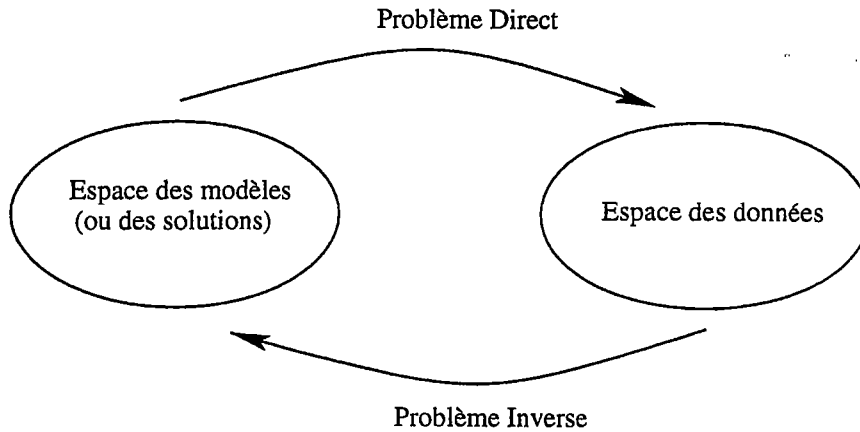


FIG. 2.1. – La définition traditionnelle du problème direct et inverse vis-à-vis de l'espace des modèles et des données.

([Berryman, 1989]). Lors de l'étude de l'inversion de données électriques, l'approximation de Born est souvent employée, mais n'est valable que pour des milieux possédant de faibles contrastes de résistivité ([Dabas et al., 1994]).

La linéarisation du problème permet d'écrire le problème direct sous la forme :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{m}}. \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{d}$  et  $\widehat{\mathbf{m}}$  sont respectivement les données simulées et le modèle,  $\mathbf{A}$  est un générateur. À partir de cette linéarisation on peut définir un opérateur qui estime directement le modèle à partir des données. Il existe plusieurs façons de construire cet opérateur ([Tarantola, 1987]; [Parker, 1994]), et, très généralement, l'estimation linéaire permettant de passer des données  $\mathbf{d}$  vers le modèle  $\widehat{\mathbf{m}}$  s'écrit :

$$\widehat{\mathbf{m}} = \mathbf{A}^{-g} \cdot \mathbf{d}, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{A}^{-g}$  est la matrice *inverse généralisée* de  $\mathbf{A}$  qui formellement n'est pas inversible (matrice non-carrée) mais pour laquelle une forme inverse  $\mathbf{A}^{-g}$  peut être choisie ou calculée numériquement ([Jackson and Matsu'ura, 1985]; [Press et al., 1992]). Le modèle estimé  $\widehat{\mathbf{m}}$  n'est pas le vrai modèle, ainsi pour compléter l'étude du problème inverse, il est nécessaire d'étudier l'effet des erreurs et la limite de résolution de ce modèle par rapport aux données et au vrai modèle supposé ([Trampert, 1998]).

Cette approche du problème inverse a été et est encore beaucoup employée lors du traitement de données électriques ([Pelton et al., 1978]; [Tripp et al., 1984]); plus spécifiquement ce sont des méthodes inverses dérivées des méthodes d'optimisation Gauss-Newton

([Lines and Treitel, 1984]; [Sasaki, 1989]). En effet, ces méthodes sont réputées très robustes et stables vis-à-vis du rapport signal/bruit, notamment les méthodes d'inversion Marquardt-Levenberg ([Marquardt, 1963]; [Smith and Vozoff, 1984]) et des gradients conjugués ([Spies and Ellis, 1995]; [Ellis and Oldenburg, 1994]). L'approximation est alors gé-

néralement obtenue par une approximation de Taylor au premier ordre (cf. Sect. 2.3.3, p. 68) ([Sasaki, 1989] ; [Tripp et al., 1984]). Il est important de noter que même si le problème physique reste non-linéaire la méthode d'inversion est linéaire en soi. Effectivement, dans beaucoup de problèmes pratiques, l'inversion non-linéaire est traitée comme un problème d'optimisation non-linéaire où un choix pertinent des mesures permet alors de définir une fonction des paramètres du modèle. Ainsi, le problème se restreint à une optimisation non-linéaire de cette fonction, qui décrit plus ou moins correctement le modèle.

Comme on peut le voir, la non-linéarité des phénomènes physiques étudiés complique considérablement le problème inverse. Souvent, l'effet dominant de cette non-linéarité est considéré comme étant la création de minima secondaires dans la fonction coût devant être minimisée. Cependant, ce point de vue est un peu trop simpliste. Les effets de la non-linéarité peuvent être beaucoup plus importants, notamment en devenant source de problèmes mal-conditionnés ([Snieder and Aldridge, 1995]). Une analogie souvent employée pour démontrer le problème des systèmes mal-conditionnés est de considérer la recherche du point d'intersection de deux droites presque parallèles dans un plan. Il est clair qu'une toute petite perturbation d'une de ces deux droites modifie énormément la position du point d'intersection. Ainsi des systèmes très proches peuvent avoir des solutions très différentes, et un mauvais conditionnement ne permettra pas d'apprécier ces différences.

Depuis quelques années le développement de la puissance de calcul des ordinateurs permet d'envisager d'autres méthodes d'inversion pleinement non-linéaires. Ces méthodes sont basées sur la génération d'un grand nombre de modèles afin de définir statistiquement les classes de modèles qui expliquent les données dans un certain sens ([Mosegaard, 1998] ; [Mosegaard and Tarantola, 1995]). Plus généralement, ces méthodes sont appelées des techniques d'inversion stochastiques. Le concept primordial de ces méthodes dans la génération des ensembles de modèles est le côté aléatoire de la méthode de recherche employée. En effet, les méthodes d'inversion de descente (type Gauss-Newton, gradient ...) ne possèdent aucun élément aléatoire, au contraire une méthode de Monte Carlo recherche des exemples de modèles dans l'espace des modèles de manière complètement aléatoire. Cependant, pour être vraiment efficace, une méthode stochastique doit également posséder un mécanisme permettant de décider si un modèle a plus ou moins de sens vis-à-vis des données. Deux exemples classiques d'algorithmes possédant ces deux caractéristiques sont : les algorithmes génétiques ([Chunduru et al., 1995] ; [Sen and Stoffa, 1991]) et le recuit simulé ([Kirkpatrick et al., 1983] ; [Chunduru et al., 1996]).

Afin d'améliorer les performances des algorithmes de recuit simulé, notamment en termes de temps de calcul, et d'obtenir des modèles lissés, Chunduru et al. (1996) paramétrisent les modèles *via* des fonctions splines, cependant ils s'accordent pour dire que cette paramétrisation n'est pas optimale pour paramétriser des structures 2-D/3-D car elles introduisent souvent des artefacts. Afin d'éviter l'introduction d'artefacts il est nécessaire de choisir très judicieusement les noeuds des fonctions splines et de permettre une variation de la localisation des noeuds pendant l'inversion. Cependant le nombre de noeuds reste fixé, ce qui ne permet pas de décrire correctement des variations brutales de conductivité ([Shaley, 1993]), qui nécessiterais de rajouter des noeuds afin obtenir une résolution suffisante de l'interface. Il est également possible d'obtenir des modèles lissés,

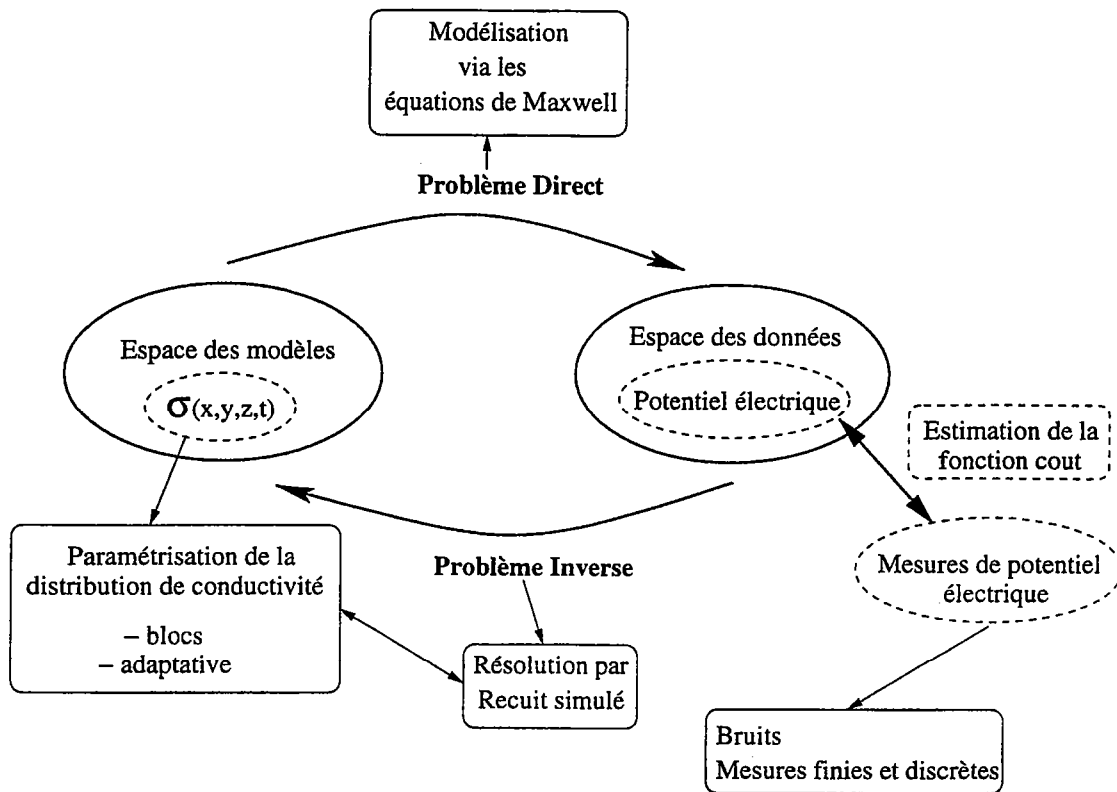


FIG. 2.2. – Schéma des interactions entre les différents paramètres.

c'est-à-dire des modèles le plus simple possible, en paramétrisant le modèle en termes de dérivées premières ou secondes en fonction de la profondeur ([Constable et al., 1987]; [Degroot-Hedlin and Constable, 1990]), cependant ceci implique une linérisation du problème direct. Une approche hybride (recherche locale et globale dans l'espace des solutions) combinant une méthode du gradient conjugué et du recuit simulé a également été utilisée par Chunduru et al. (1997) permettant alors d'éliminer en partie la nécessité d'avoir un bon modèle de départ pour le gradient conjugué et accélérant la recherche du meilleur modèle pour l'algorithme du recuit simulé.

Le recuit simulé a été utilisé dans de nombreux problèmes d'imageries géophysiques ([Dosso and Oldenburg, 1991]; [Sen et al., 1993]; [Gibert and Virieux, 1991]; [Gibert et al., 1994]; [Courboux et al., 1996]; [Prasad, 1999]). De plus, nous allons voir que la philosophie du traitement de l'information développée autour de notre problème semble en bonne adéquation avec une résolution du problème inverse *via* une méthode d'inversion comme le recuit simulé. La figure (2.2) reprend le schéma très simple (2.1) en intégrant les caractéristiques particulières de l'inversion des données électriques. Pour rappel, on a vu que le problème direct était résolu numériquement *via* les équations de Maxwell, qui permet de passer de l'espace des modèles de la distribution de conductivité vers l'espace des données de potentiel électrique.

Les modèles sont donc une représentation de la distribution de conductivité, il est important de bien définir cette représentation car c'est l'image finale que nous obtiendrons qui doit être représentative de la structure du sous-sol. Elle doit en plus être suffisamment simple pour ne pas présenter de détails superflus (artefacts) qui pourraient conduire à des interprétations fausses de la part de l'utilisateur. Les méthodes d'inversion utilisant une linéarisation nécessite une régularisation, que l'on peut voir comme un filtre passe-bas, annihilant les informations hautes fréquences dans la distribution de conductivité. Ceci permet effectivement d'aboutir à un modèle relativement simple et ne présentant pas ou peu d'artefacts. Cependant, les données de potentiels électriques peuvent permettre d'obtenir des informations hautes fréquences dans certaines zones du terrain étudié et une régularisation provoque un traitement uniforme sur la totalité de la distribution de conductivité. Cet inconvénient nous a conduit à définir une paramétrisation adaptative de la distribution de conductivité afin de pouvoir introduire des détails supplémentaires bien localisés (par ex. près de la surface).

Le principe consiste à modifier la structure de la distribution de la conductivité au cours du processus d'inversion. Afin de permettre cette modification, il est nécessaire de paramétriser adéquatement le modèle de conductivité. Une paramétrisation basée sur une transformation de Fourier n'est pas envisageable puisqu'elle conduirait aux mêmes problèmes posés par la régularisation du problème. Les ondelettes orthogonales semblent bien indiquées pour permettre une paramétrisation multi-échelle, et en fait le choix que nous avons fait se rapproche d'une décomposition en ondelettes de Haar. En effet, nous avons choisi de découper le modèle de conductivité en un ensemble de blocs dont la dimension et la résolution sont indépendantes entre elles. Ainsi, la résolution des blocs pourra être adaptée au cours de l'inversion afin d'incorporer des détails de plus en plus fins de manière très localisée dans le modèle de conductivité. Un tel choix rend l'inversion très fortement non-linéaire et impose une modification du nombre total de paramètres définissant le modèle pendant l'inversion. De telles contraintes sont parfaitement envisageables avec une méthode d'inversion telle que le recuit simulé.

En sus d'être une méthode pleinement non-linéaire et très souple d'utilisation, le recuit simulé permet également un libre choix du critère de calcul de la fonction coût. Cette caractéristique est intéressante lorsque la qualité des données obtenues varie. Effectivement, certaines valeurs aberrantes présentes dans les données peuvent être plus ou moins pris en compte lors du calcul du coût d'un modèle. Cependant, dans le cas de données de très bonne qualité il peut être judicieux de choisir un autre critère.

Un autre point intéressant du recuit simulé est la possibilité de prendre en compte les informations *a priori* à divers niveaux du processus d'inversion. En effet, il est possible d'implémenter un générateur de modèles qui prenne en compte les *a priori* géologiques contraignant ainsi en permanence les modèles. Cependant, une telle contrainte peut s'avérer extrêmement néfaste lors de la recherche dans l'espace des modèles en ne permettant pas la génération de modèles intermédiaires pour sortir de minima locaux. Ainsi, il semble plus judicieux d'utiliser les informations *a priori* disponibles au début du processus d'inversion. La génération de modèle en accord avec les *a priori* peut se faire *via* un générateur spécifique dans lequel une intervention de l'utilisateur permettrait d'intégrer des données

difficiles à formaliser.

Ainsi, il y a deux points à aborder : la paramétrisation multi-échelle adaptative et le recuit simulé. La première partie de ce chapitre traite plus précisément de l'algorithme du recuit simulé. La seconde partie concerne l'inversion multi-échelle en soi. En effet, cette approche nécessite d'aborder divers points : (i) la paramétrisation du modèle, (ii) l'affinage de la grille, i.e. le changement d'échelle, (iii) l'initialisation de la nouvelle grille. Effectivement après chaque affinage, on peut considérer un problème nouveau mais avec de nouvelles informations *a priori*.

Enfin, la dernière partie mettra en évidence avec plusieurs modèles synthétiques, le comportement et les limitations de la méthode inverse proposée.

## 2.2. Recuit Simulé.

### 2.2.1. Principes.

Le recuit simulé est une méthode stochastique non-linéaire basée sur l'analogie physique suivante : les métaux atteignent un stade thermique de très basse température en passant par des états thermiques métastables, qui sont en fait des minima locaux pour la fonction énergétique totale. Afin de quitter ces états métastables, les métallurgistes pratiquent une technique appelée le "recuit" qui consiste à réchauffer le métal puis à le refroidir très lentement pour qu'il atteigne un état plus stable.

L'analogie avec la minimisation d'une fonction est immédiate. En effet, afin de sortir de minima locaux (cf. fig. (2.3), il suffit de créer des perturbations aléatoires, perturbations qui doivent affecter le modèle courant soit lors de sa génération, soit lors de son acceptation par l'inversion. Puisque ces perturbations sont aléatoires et pas toujours dans le sens d'une minimisation (c'est-à-dire d'une baisse du coût du modèle), elles permettent d'explorer une région importante dans l'espace des solutions. Pour une introduction générale et des exemples illustrés, [Laarhoven and Aarts, 1987] présentent un livre complet sur le sujet.

Ainsi le principe de base de l'algorithme du recuit simulé est de perturber itérativement un modèle afin de minimiser une fonction coût et de converger vers un modèle à très faible coût, le vrai modèle étant celui dont le coût paraît être le moindre pour expliquer les données acquises. A chaque modèle  $m_l$  est associée une probabilité *a posteriori*  $p(m_l)$ , et donc si ce modèle est le résultat d'une perturbation (la section 2.2.4 détaille la perturbation effectuée sur le modèle) du modèle  $m_{l-1}$  de l'itération précédente tel que :

$$m_l = m_{l-1} + \delta m_l, \quad (2.3)$$

pour lequel il existe également une probabilité  $p(m_{l-1})$ . La probabilité  $P_T$  pour que le nouveau modèle soit accepté est donnée par :

$$P_T(m_{l-1} \rightarrow m_l) = \min \left[ 1, \left( \frac{p(m_l)}{p(m_{l-1})} \right)^{\frac{1}{T}} \right], \quad (2.4)$$

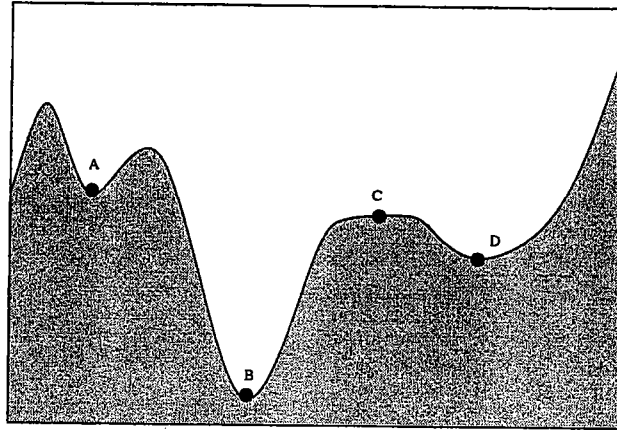


FIG. 2.3. — Représentation d'un fonction coût hypothétique. Les points A et D sont des minima locaux, lieu où certaines méthodes inverses peuvent rester bloquées lors de la recherche du modèle de coût minimal. Au point C, les dérivées d'ordre élevées peuvent être nulles, ce qui peut poser d'importants problèmes à certains algorithmes (par. ex. méthodes de gradient). Le point B est le minimum absolu.

où  $T$  est un paramètre arbitraire, positif et sans dimension appelé la température. Le nouveau modèle  $m_l$  est retenu si cette probabilité est supérieure à un nombre aléatoire tiré entre  $[0,1]$  pour chaque itération. D'après (2.4) il est évident que lorsque  $p(m_l) > p(m_{l-1})$ , c'est-à-dire lorsque le modèle perturbé possède une probabilité *a posteriori* inférieure à celle de l'itération précédente, la probabilité  $P_T$  est supérieure à 1, et donc le modèle est automatiquement accepté. Cependant, il est possible que la transition  $(m_{l-1} \rightarrow m_l)$  soit retenue lorsque  $p(m_l) < p(m_{l-1})$ , c'est-à-dire lorsque le nouveau modèle est moins bon que le précédent.

C'est ce point très particulier de l'algorithme de Métropolis ([Metropolis et al., 1953]) qui permet à ces méthodes de sortir des minima secondaires de la fonction coût (ou des maxima locaux de la densité de probabilité *a posteriori*, cf. fig. (2.4)). Cependant, un confinement dans des minima locaux de la fonction coût est souvent observé avec un algorithme de Metropolis strict. En effet, les modèles générés permettant de sortir du minimum possèdent une probabilité quasi nulle, d'où le confinement observé. La solution employée par l'algorithme du recuit simulé consiste à réduire les maxima locaux en déformant la forme de la densité de probabilité. Pour un nombre infini d'itérations, il peut être montré ([Mosegaard and Tarantola, 1995]) que la distribution de modèles générés à partir d'un tel algorithme possède une densité de probabilité telle que :

$$P_T(m_l) = \frac{1}{C} p(m_l)^{\frac{1}{T}}, \quad (2.5)$$

où  $C$  est une constante de normalisation. L'équation (2.5) indique que le contrôle de la topologie de la densité de probabilité est déterminé par la température  $T$ . Ainsi, l'algorithme du recuit simulé consistera à réaliser deux boucles imbriquées ; la première permettant le contrôle de l'évolution de la température, la seconde étant une boucle de Metropolis (simulant l'équilibre thermodynamique (recherche du modèle de plus faible coût) à température

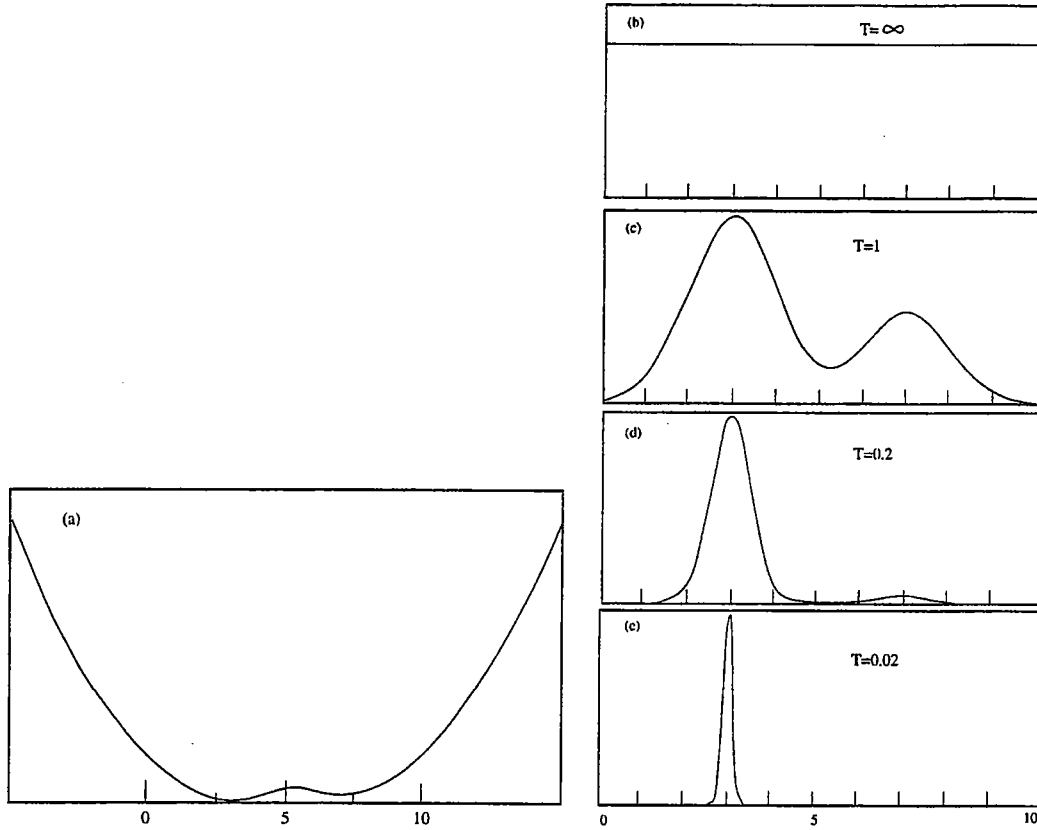


FIG. 2.4. – (a) Exemple schématique d’une fonction coût avec un minimum global à  $m=3$  et un minimum local à  $m=7$ . (b-d) Forme de la densité de probabilité pour la fonction coût (a) à différentes températures : (b)  $T=\infty$ , (c)  $T=1$ , (d)  $T=0.2$  et (e)  $T=0.02$ . En commençant à  $T=\infty$  et en décroissant lentement la température, si on génère aléatoirement des valeurs de  $m$  en respectant la densité de probabilité correspondant à la température courant, on converge vers une valeur de  $m=3$ . (d’après Tarantola, 1987)

fixe).

Pour  $T = \infty$ , la probabilité (2.5) est uniforme ( $P_{T=\infty} = \frac{1}{C}$ ) et tous les modèles sont acceptés (cf. fig. 2.4b). À  $T = 1$ ,  $P_{T=1} = \frac{1}{C}p(m_i)$ , et la densité de probabilité des modèles est égale à la probabilité *a posteriori* des modèles, ceci est strictement équivalent à une recherche dans l’espace des solutions *via* un algorithme de Metropolis. La représentation de la densité de probabilité de la figure (2.4c) illustre le fait que les minima locaux de la fonction coût (correspondant alors à un maximum de la densité de probabilité) peuvent conduire la méthode inverse vers un résultat non-optimal. Quand  $T \rightarrow 0$ , suffisamment lentement, la densité de probabilité tend vers une fonction de Dirac  $\delta$  localisée au meilleur modèle :

$$P_{T \rightarrow 0} = \delta(m_l - m_{\text{meilleur}}). \quad (2.6)$$

Les courbes (2.4d) et (2.4e) montrent la restriction progressive vers le “vrai” modèle de l’espace des solutions, conduisant ainsi la génération des nouveaux modèles à se restreindre



à un espace de plus en plus petit.

### 2.2.2. Calcul de la fonction coût.

Avant d'aborder en détail les divers aspects d'une inversion de type recuit simulé, nous allons étudier un paramètre, relativement universel dans le cadre des méthodes inverses et plus généralement des méthodes d'optimisation : le coût (ou "*misfit*"). Le coût représente la qualité d'un modèle vis-à-vis des données, d'une certaine manière on peut dire que plus le coût d'un modèle est bas, mieux il explique les données. C'est en fonction de l'évolution de ce paramètre que les décisions des méthodes d'inversion, afin d'accepter, de refuser ou de se diriger vers un modèle sont réalisées.

Du fait de sa simplicité, le critère des moindres carrés (norme  $\ell_2$ ) est souvent employé pour la résolution des problèmes inverses. Soit  $\mathbf{d}$  un vecteur de données quelconque de dimension  $N$ ,  $\mathbf{m}$  un vecteur de paramètres représentant un modèle quelconque et  $g(\mathbf{m})$  la relation théorique permettant de passer de l'espace des paramètres à l'espace des données (i.e.  $g(\mathbf{m}) = \mathbf{d}$ ). Une mesure des vraies valeurs de  $\mathbf{d}$  fournit  $\mathbf{d}_{obs}$ . La fonction coût  $C(\mathbf{m})$  au sens de la norme  $\ell_2$  se définit par :

$$C(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{g^i(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}^i}{\sigma^i} \right]^2, \quad (2.7)$$

où  $\sigma_i$  est l'erreur de mesure (déviations standard) sur la  $i^{eme}$  donnée mesurée. Si cette erreur n'est pas connue, ou dans le cas de données synthétiques non-bruitées, il est courant alors de positionner la valeur de  $\sigma$  à 1.

Le problème de ce critère, malgré sa grande robustesse, est qu'il peut devenir un très mauvais critère de variance minimale dans certains cas. Lorsqu'un petit nombre de données, possédant des valeurs importantes et des erreurs élevées, sont présentes dans les mesures, ce critère est relativement mal adapté ([Tarantola, 1987]). Effectivement, ce sont ces données précisément qui vont influencer le plus la valeur de la fonction coût. Les autres données qui *a priori* fournissent plus d'informations, ou du moins des informations plus pertinentes, sur les paramètres du vrai modèle seront quasiment occultées. Ainsi, [Tarantola, 1987] préconise d'employer ce critère seulement si l'hypothèse d'une distribution gaussienne de toutes les incertitudes (erreurs de modélisation, erreurs de mesures, erreurs dans le modèle *a priori*) n'est pas fortement violée.

Pour d'autres types d'incertitudes (ne suivant pas une loi gaussienne) de meilleurs critères existent. Ainsi ceux basés sur une norme  $\ell_p$  (avec  $1 \leq p \leq \infty$ ) présentent également l'avantage d'une formulation mathématique simple. Lorsque  $p$  est égal à 1 (norme  $\ell_1$ ), la fonction coût devient peu sensible aux écarts des mesures et permet alors d'obtenir une robustesse que le critère moindres carrés ne possède pas vis-à-vis de certains jeux de données. Le critère de la norme  $\ell_1$  s'écrit :

$$C(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{|g^i(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{obs}^i|}{\sigma^i} \right], \quad (2.8)$$

Le choix d'une méthode d'inversion comme le recuit simulé nous permet de changer très simplement de critère pour le calcul de la fonction. Ainsi, si le critère de norme  $\ell_2$  s'applique sans problème dans de nombreux cas, et pour les tests synthétiques en l'occurrence, dans le cas de données électriques réelles nous verrons que la robustesse de la norme  $\ell_1$  semble en meilleur adéquation avec nos données.

### 2.2.3. Décroissance de la température.

L'un des aspects délicats du recuit simulé est le contrôle de la décroissance de la température. À l'initialisation, la température est fixée à une valeur assez élevée, par exemple 1, qui en fait représente l'algorithme de Métropolis strict (la densité de probabilité est égale à la probabilité *a posteriori*), puis une loi permet de contrôler la décroissance de la température afin de guider progressivement la recherche aléatoire vers la zone de l'espace des solutions présentant la plus forte probabilité *a posteriori* : le minimum global.

Si la décroissance de la température est trop rapide, le système peut se trouver piégé dans un minimum local (équivalent au gel d'un solide dans un état métastable) et donc le modèle final ne sera pas nécessairement le "meilleur" modèle (cf. fig. (2.3)). Le choix d'une décroissance très lente, permettant de laisser évoluer la recherche des modèles dans l'espace des solutions, ne permet plus de conserver une convergence suffisamment rapide vers la solution puisque de très nombreux modèles sont testés. Bien évidemment, le choix final sera un compromis entre ces deux limites.

L'évolution de la température peut être totalement définie par trois paramètres :

- La température initiale,  $T_i$ ,
- la température finale,  $T_f$ ,
- la loi de décroissance.

La température initiale doit être suffisamment élevée pour permettre une exploration très large de l'espace des modèles, c'est-à-dire créer une agitation thermique donnant lieu à la génération de modèles variés et à la sélection d'un grand nombre de modèles quels que soient leurs coûts. En fait, la condition préconisée par Kirkpatrick et al. (1983) est de fixer la température initiale afin que 80% des modèles générés soient acceptés.

Différentes techniques permettent d'obtenir un ordre de grandeur de la valeur à affecter à la température initiale permettant de respecter cette condition, la plupart sont basées sur une étude systématique de nombreux modèles et de leurs coûts respectifs, ainsi Gibert et Virieux (1991) définissent la température initiale par :

$$T_i = \widehat{C_N} + sd(\widehat{C_N}), \quad (2.9)$$

où  $\widehat{C_N}$  est la valeur moyenne des coûts de  $N$  modèles choisis aléatoirement dans l'espace des solutions et  $sd(\widehat{C_N})$  est la déviation standard de cette valeur moyenne. Une étude indépendante du processus d'inversion strict permet donc de déterminer antérieurement une valeur de température initiale qui sera typiquement adaptée au problème et aux données étudiées.

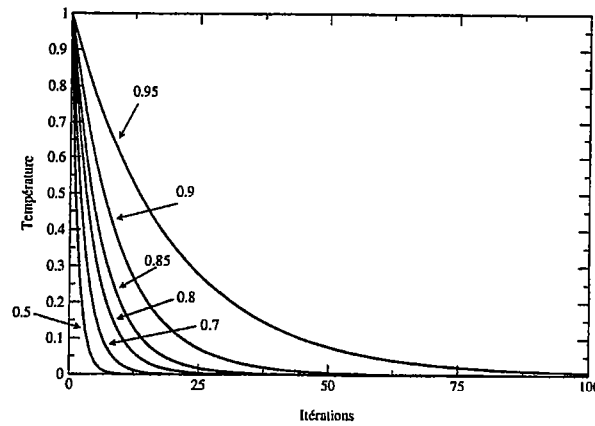


FIG. 2.5. — Représentation de la décroissance de la température. L'allure de la courbe est fonction du paramètre  $\lambda$  de l'équation (2.10).

Le choix de la température finale est beaucoup plus simple, puisqu'on peut considérer que l'agitation thermique n'aura plus aucun effet lorsque l'amplitude de la perturbation affectée à la probabilité d'acceptance d'un modèle sera inférieure ou égale au niveau de bruit contenu dans les données. Ainsi, une analyse rapide des données permettra d'obtenir rapidement l'ordre de grandeur de la température finale.

La détermination de la loi de décroissance de la température est plus délicate à définir. Cependant, l'idée générale est d'obtenir une loi suffisamment lente pour ne pas geler le modèle dans un état intermédiaire. À haute température le modèle évolue très vite, et ne risque pas de rester dans un minimum local, ainsi la loi peut décroître relativement rapidement. Par contre, à basse température, il est nécessaire d'évoluer lentement. Ainsi une loi simple du type :

$$T_{l+1} = \lambda \cdot T_l \text{ avec } \lambda < 1, \quad (2.10)$$

permet de décrire un tel comportement de la température. La décroissance des hautes températures est augmentée lorsque  $\lambda$  diminue (cf. fig. (2.5)). Le dernier paramètre à définir est le nombre d'itérations (i.e. le nombre de perturbations de modèles à réaliser) pour chaque palier de température. En fait, Mirkin et al. (1993) proposent un compromis optimum entre le nombre d'itérations par palier et la vitesse de refroidissement : une vitesse de refroidissement assez élevée (avec  $0.5 < \lambda < 1$ ) et relativement peu d'itérations ( $10 < N_l < 50$ ).

Les principaux points et paramètres spécifiques à l'algorithme du recuit simulé ont été discutés. Cependant, il reste un point primordial inclus dans l'équation (2.3) qui indique que le modèle de l'itération précédente  $m_{l-1}$  est modifié *via* une perturbation  $\delta m$  pour produire le modèle  $m_l$ . Il existe plusieurs façons de choisir cette perturbation qui contrôle l'exploration de l'espace des solutions, et donc la convergence de l'algorithme. Ce dernier point est traité dans la partie suivante.

**Encart : Le problème du voyageur de commerce**

Le problème du voyageur de commerce est connu pour sa grande difficulté. La simplicité de son énoncé et les nombreuses applications qu'il présente en ont fait un problème très connu. Il s'agit d'un voyageur qui veut visiter un certain nombre de villes une et une seule fois, en partant de son domicile pour y revenir en fin de parcours. Son objectif principal est évidemment de réaliser un voyage au moindre coût. Si on suppose que les coûts sont proportionnels aux distances parcourues, le problème consiste à trouver un parcours de longueur minimale. Quand le nombre de villes augmente, le nombre de possibilités augmente exponentiellement (explosion combinatoire) et il est alors impossible de tester toutes les possibilités. On est donc obligé de trouver des approximations. En prenant une solution au hasard, puis en vérifiant si elle respecte certaines conditions (coût minimum) et en la modifiant pour qu'elle les respecte, l'expérience montre que très rapidement on converge vers un minimum qui est très proche de la meilleure solution.

**2.2.4. Perturbation des modèles.**

La génération des nouveaux modèles consiste souvent à appliquer une perturbation aléatoire. Cette technique simple peut se révéler très efficace dans beaucoup de cas, notamment lorsque le problème est fortement non-linéaire et lorsque peu d'informations *a priori* sont disponibles (par ex. le problème du voyageur de commerce, cf. encart 2). Cependant ce choix impose un nombre d'itérations important à chaque palier de température afin d'être réellement efficace lorsque le nombre de paramètres à estimer est très important. Ainsi, afin de perturber le plus efficacement possible les modèles, nous avons décidé de guider la perturbation pour explorer plus efficacement l'espace des solutions.

La méthode retenue est celle de la descente du simplexe ([Nedler and Mead, 1965]) qui permet une recherche dans un domaine continu. Cette particularité est primordiale lorsque les paramètres recherchés sont le logarithme de la distribution de conductivité. En effet, les variations naturelles de la conductivité des roches et des matériaux terrestres varient dans une large gamme (plusieurs ordres de grandeur), ainsi il est très délicat de discrétiser l'espace des solutions. Nous verrons également par la suite (cf. section (2.3.2)) que le logarithme de la conductivité est le paramètre le plus adapté pour définir notre modèle de conductivité.

Le principe de base de la descente du simplexe consiste en une recherche géométrique de la solution ([Nedler and Mead, 1965]; [Press and Teukolsky, 1991]) dans l'espace des solutions, la figure (2.6) montre un exemple sur un cas simple d'un modèle à deux paramètres. Le simplexe est défini comme étant un ensemble de  $N + 1$  modèles des paramètres  $\vec{P} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  où  $N$  est le nombre de paramètres recherchés et décrivant un modèle. Dans un espace à  $N$  dimensions  $\mathbb{R}^N$  chaque modèle représente un point. Sur la figure (2.6) le nombre de paramètres est de deux et donc le simplexe est représenté par un triangle dans l'espace des solutions. Le dernier critère permettant de décrire complètement le simplexe est la valeur de la fonction coût en chaque point, i.e pour chaque modèle définissant le

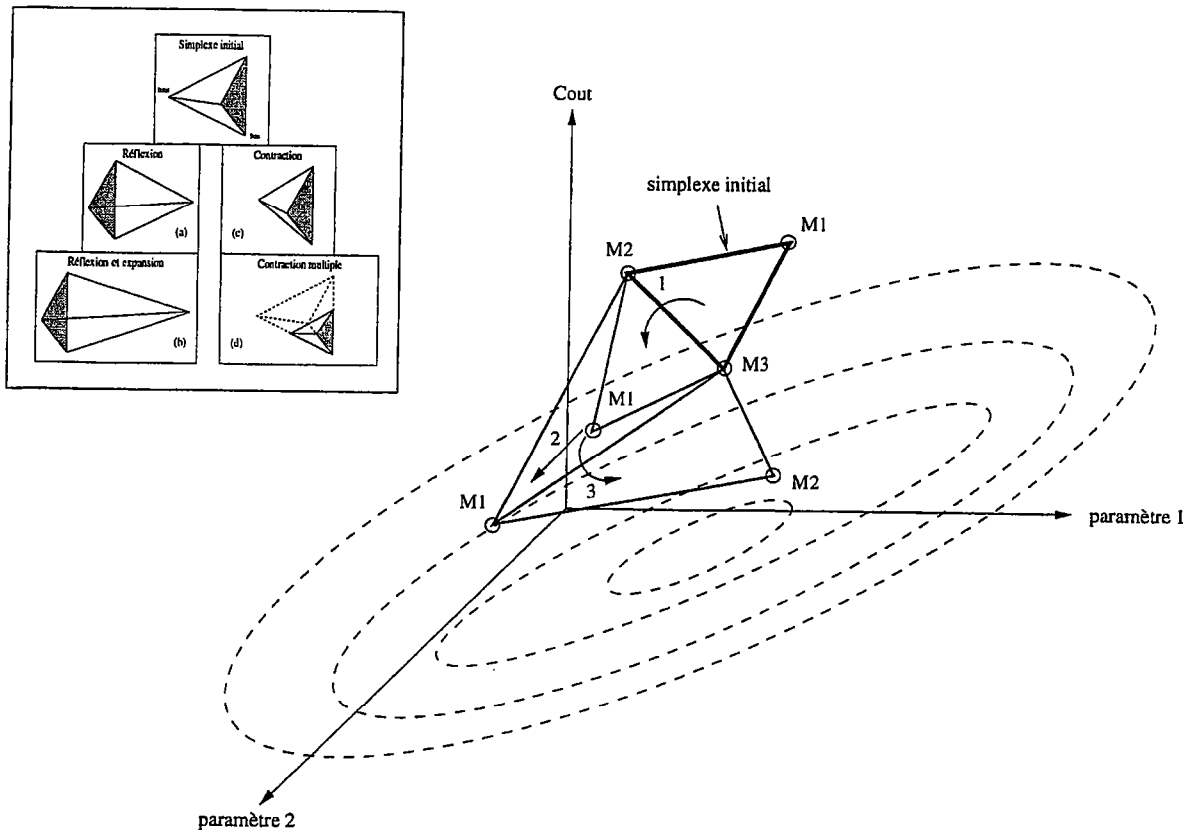


FIG. 2.6. — Schéma décrivant le principe de la recherche géométrique de la solution de la descente du simplexe. Le modèle recherché est constitué de 2 paramètres, le simplexe étant alors constitué par 3 points (représentant 3 modèles à 2 paramètres) : M1, M2 et M3. La fonction coût représentée est très simple et possède un minimum. La première opération géométrique effectuée (notée 1) est une réflexion par rapport au deux modèles de plus faible coût. La seconde opération est une expansion du point de plus faible coût (M1), puis ensuite une seconde réflexion permet d'obtenir un nouveau modèle (M2). L'encart en haut à gauche montre les différentes opérations géométriques réalisables.

simplexe.

La recherche géométrique va consister à effectuer plusieurs opérations géométriques (cf. fig. 2.6) sur la structure ainsi définie, donnant lieu à la génération de nouveaux modèles dont le coût est plus faible. Ces opérations sont réalisées itérativement jusqu'à effondrement de la structure autour d'un seul point.

L'introduction du recuit simulé intervient lors de la décision d'accepter ou de refuser le nouveau modèle créé par l'opération géométrique testée. En effet, certaines transformations géométriques peuvent ne pas fournir de modèles ayant un coût inférieur à celui de plus faible coût. Dans ces conditions l'algorithme de la descente du simplexe refuse l'opération géométrique et en essaye alors une autre afin de générer un nouveau modèle. Le rôle de la température va intervenir à ce niveau, en pondérant le coût des nouveaux modèles par une valeur fonction de la température et d'un nombre aléatoire  $a$  compris entre  $[0,1]$  :

$$p(T, l) = T \cdot \ln\left(\frac{1}{a}\right), \quad (2.11)$$

où  $T$  est la température à l'itération  $l$ . Cette perturbation *a posteriori* du coût du modèle rend possible l'acceptation d'un modèle *a priori* de plus fort coût permettant ainsi éventuellement de sortir d'un minimum local (cf. fig. (2.3)). Ceci peut également être vu comme une manière de lisser la fonction coût et permettent au simplexe de se diriger vers le minimum global, celui-ci ayant tendance à “tomber” rapidement dans un minimum local en s'effondrant très rapidement. L'introduction du recuit simulé permet alors d'obtenir un algorithme hybride d'inversion locale et globale.

## 2.3. Inversion multi-échelle.

### 2.3.1. Introduction.

Le recuit simulé est une méthode qui laisse une grande liberté dans la définition de la fonction coût et permet de choisir celle la plus adaptée aux données et aux problèmes. Comme cela a été dit dans l'introduction de ce chapitre, cette souplesse permet également de définir une paramétrisation particulière du modèle. La première section de cette partie présente les bases de cette paramétrisation, tandis les deux suivantes développent deux points essentiels directement induits par le choix de la paramétrisation du modèle.

### 2.3.2. Paramétrisation multi-échelle du modèle.

La paramétrisation du modèle joue un rôle très important dans l'inversion. Par exemple dans le cas des problèmes 1-D, la paramétrisation est relativement simple : la résistivité et l'épaisseur d'un nombre prédéterminé de couches peuvent suffire à décrire correctement le modèle de terrain. Cependant, le nombre de couches doit être fixé à l'aide d'informations *a priori* sur les données, à moins de considérer la résistivité comme étant définie par une fonction de la profondeur et d'ajuster alors les paramètres de cette fonction.

Pour les structures 2-D/3-D, la paramétrisation peut également être relativement simple. Si la forme du modèle est inconnue, il peut être modélisé en discrétisant le sous-sol en un nombre fini de cellules ou de blocs de résistivité constante. Ce type de paramétrisation requiert en général de choisir préalablement la dimension des blocs définissant le modèle, or souvent ceci est très difficile à évaluer puisque ces informations présupposent une assez bonne connaissance du site étudié. Ainsi, la dimension des blocs est rarement bien adaptée à tous les objets présents dans le site étudié. De plus, afin de pouvoir décrire les objets de petites dimensions, les cellules sont généralement de petites dimensions ce qui entraîne un grand nombre de paramètres à estimer, ce qui provoque une grande sous-détermination du problème inverse avec beaucoup plus de paramètres que de mesures.

Une autre paramétrisation utilisée est une représentation par fonctions splines ([Pelton et al., 1978]; [Chunduru et al., 1996]) qui a l'avantage de réduire le nombre de

paramètres. Cependant, il est très difficile de décrire des structures 2-D/3-D par des fonctions splines ([Chunduru et al., 1996]) et il faut attacher le plus grand soin au choix des noeuds des fonctions. Ceux-ci doivent être choisis de manière pertinente afin de représenter correctement les structures géologiques, ce qui revient à avoir une bonne connaissance *a priori* du secteur étudié.

Si nous choisissons de représenter notre modèle de conductivité par un ensemble de blocs compacts  $V_k$  pavant l'intégralité de la zone à étudier  $V$  tel que :

$$V = \bigcup_k V_k \quad (2.12)$$

avec

$$V_i \cap V_{j \neq i} = \emptyset, \quad (2.13)$$

l'équation (1.98) donnant le potentiel électrique en fonction du potentiel primaire et secondaire peut se réécrire :

$$\phi(r_m | r_i) = \frac{I(r_i)}{2\pi\sigma(r_i)|r_i - r_m|} + \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{V_k} \frac{\nabla \ln \sigma(r) \cdot \nabla \phi(r | r_i)}{|r - r_m|} dv. \quad (2.14)$$

Le second terme, représentant le potentiel électrique secondaire, a été transformé en une somme d'intégrales sur chaque bloc  $V_k$ . Cette équation (2.14) permet de montrer qu'une représentation optimale en blocs de la distribution de conductivité est obtenue lorsque chaque bloc  $V_k$  possède une intégrale (où un potentiel électrique secondaire) significative. En effet, un bloc dont le potentiel secondaire est négligeable signifie que sa valeur de conductivité est faiblement contrôlé par les données. Ainsi, le problème est fortement sous-déterminé, ce qui conduit à produire un système linéaire mal-conditionné, et donc extrêmement sensible à la moindre perturbation du modèle. Cependant, une paramétrisation optimale peut permettre de régulariser le problème inverse en rendant pertinent chaque paramètre du modèle vis-à-vis des données.

D'un autre côté, une telle paramétrisation rend le problème inverse beaucoup plus délicat à résoudre, puisque la paramétrisation doit être déterminée pendant l'inversion, si aucune information *a priori* n'est disponible et si l'on veut également ne pas pré-déterminer la structure du modèle. C'est pourquoi nous avons opté pour une paramétrisation multi-échelle adaptative. La figure (2.7) montre un exemple de paramétrisation multi-échelle adaptative optimale pour un modèle type de conductivité (fig. 2.7f). L'idée de cette paramétrisation peut être rapprochée de celle utilisée lors de la résolution multigrille du problème direct. En effet le principe est d'incorporer de plus en plus de détails au cours du processus d'inversion. Ceci est possible grâce à la nature elliptique de l'équation de Poisson. En effet, le phénomène physique de circulation de courant électrique dans le sous-sol est un processus intégrateur et des valeurs moyennes de conductivité ont un sens vis-à-vis du modèle exact de la distribution de la conductivité.

Cette caractéristique d'intégration sur de grands volumes des méthodes électriques fait que ce type de méthode possède en général une très mauvaise résolution ; c'est-à-dire qu'il

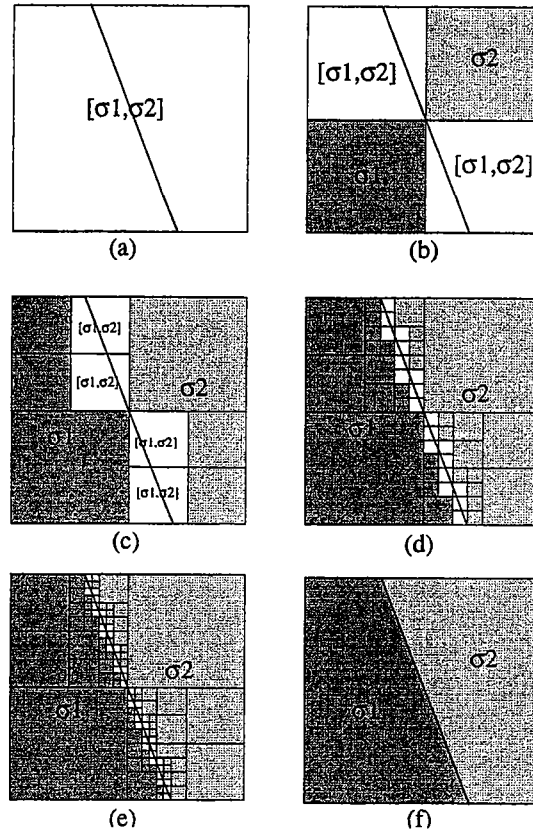


FIG. 2.7. – Exemple d'une paramétrisation évolutive optimale. (a-e) evolution de la paramétrisation du modèle. (f) Modèle de résistivité de référence.

est très difficile de définir correctement les bords des objets et des structures rencontrés dans le sous-sol. C'est également ce défaut qui nous a guidé vers une paramétrisation adaptative et multi-échelle. En effet, comme le montre la figure (2.7), dans le cas d'un tel découpage, la localisation et la géométrie de la faille est relativement bien définie.

Afin de réaliser cette paramétrisation, nous représentons notre modèle inverse par un pavage compact de blocs irréguliers de conductivité constante en respectant les équations (2.12) et (2.13). En fait chaque bloc (ou cellule) est constitué d'un ensemble de mailles de la plus fine grille utilisée pour décrire notre distribution de résistivité. Afin de rendre cette paramétrisation évolutive et surtout adaptative vis-à-vis des structures de sous-sol, le nombre de blocs augmente progressivement lors du processus d'inversion (cf. fig. (2.7)), et la résolution des structures doit s'améliorer au cours de l'inversion, sans pour autant essayer d'affiner des zones non résolues par les données utilisées.

Les équations (1.98) et (2.14) montrent dans leur second terme, celui qui est associé au potentiel secondaire une relation directe entre ce potentiel et le logarithme de la conductivité. Cette relation nous a dirigé vers une inversion selon le paramètre logarithmique de la conductivité :  $\ln \sigma$ . D'autres raisons peuvent également être invoquées pour justifier ce choix : positivité de la conductivité, variation selon de très grandes gammes, de  $10^{-6}$  à



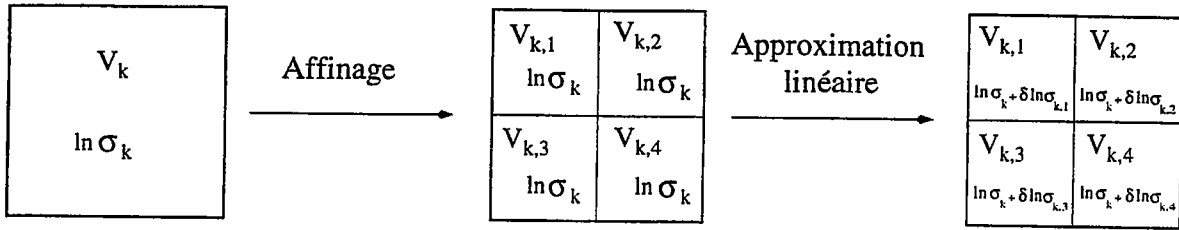


FIG. 2.8. – Représentation schématique de la procédure d'affinage. Le bloc est subdivisé en quatre blocs de taille identique, puis après l'affectation à chaque bloc de la valeur de résistivité du bloc mère, une approximation linéaire permet alors d'estimer la variation de résistivité à affecter à chaque blocs fils.

$10^6$  de la conductivité des matériaux terrestres (cf. tab. (.1), p.110) et sensibilité au bruit diminuée ([Sasaki, 1989]). Cela permet également de rendre l'inversion invariante, excepté pour le signe, par rapport au choix de la quantité physique, qui peut être indépendamment la conductivité ou la résistivité. Ainsi la paramétrisation du modèle consiste en un nombre variable de blocs possédant chacun une valeur constante  $\ln \sigma_k$ .

L'utilisation du logarithme de la conductivité se justifie également pour l'utilisation du critère des moindres carrés lors du calcul de la fonction. Effectivement, la conductivité est un paramètre positif, par définition, ceci est également vrai pour la résistivité, et de la majorité des paramètres permettant de décrire les propriétés des matériaux. Ainsi l'hypothèse que les informations *a priori* et que les incertitudes suivent une loi gaussienne est peu cohérente, car une fonction gaussienne ne fournit pas une probabilité nulle pour les valeurs négatives. Une contrainte de positivité des paramètres peut être appliquée à diverses étapes du processus d'inversion (génération des modèles, acceptation du modèle) afin de pouvoir utiliser une norme  $\ell_2$ . Cependant ce choix n'est certainement pas très rigoureux et ce n'est pas la manière la plus simple d'aborder le problème. Choisir le logarithme du paramètre permet alors de définir un *nouveau* paramètre non-borné dont la distribution *a priori* peut être gaussienne.

### 2.3.3. Initialisation par approximation linéaire.

Notre approche multi-échelle de l'inversion impose de diviser plusieurs fois certaines mailles de la grille représentant le modèle de résistivité. Il est évident qu'afin d'optimiser et surtout de rentabiliser les efforts fournis à l'étape précédente, il est important d'utiliser convenablement la valeur de résistivité de la maille à subdiviser. Ce problème peut être considéré comme un nouveau problème d'inversion avec des informations *a priori* supplémentaires et/ou mises à jour.

Afin de résoudre ce problème inverse "interne" et donc initialiser le plus rapidement et le plus efficacement possible la prochaine étape de l'inversion multi-échelle, les nouvelles valeurs de résistivité (celles correspondant aux nouvelles mailles créées par la subdivision de la maille mère (fig. 2.8)), sont évaluées à partir d'une approximation linéaire. En fait, cela revient à linéariser le problème et à résoudre une optimisation linéaire.

Soit  $\ln \vec{\sigma}_0 = (\ln \sigma_1, \ln \sigma_2, \dots, \ln \sigma_k, \dots, \ln \sigma_n)$  le vecteur  $(n \times 1)$  désignant les conduc-

tivités estimées à l'étape précédente par la méthode inverse,  $\vec{d}_0$  le vecteur des données simulées par le modèle de conductivité de  $\ln \vec{\sigma}_0$  et  $M(\ln \vec{\sigma})$  représentant le modèle direct, on a :

$$M(\ln \vec{\sigma}_0) = \vec{d}_0. \quad (2.15)$$

Comme le vecteur  $\ln \vec{\sigma}_0$  n'ajuste pas correctement les données simulées aux vraies données, il est important d'essayer de connaître, au moins partiellement, le  $\delta \ln \vec{\sigma}$ , i.e. la perturbation *a priori*, à appliquer aux conductivités afin de mieux contraindre notre modèle de résistivité. Donc si  $\vec{d}$  est le vecteur des données, on peut écrire :

$$M(\ln \vec{\sigma}_0 + \delta \ln \vec{\sigma}) = \vec{d}, \quad (2.16)$$

qui peut se développer par approximation au premier ordre :

$$M(\ln \vec{\sigma}_0) + \delta \ln \vec{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \ln \vec{\sigma}} M(\ln \vec{\sigma}) \big|_{\ln \vec{\sigma}_0} = \vec{d}, \quad (2.17)$$

et donc en substituant le premier terme (cf. eq. 2.15) du membre à gauche on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \ln \vec{\sigma}} M(\ln \vec{\sigma}) \big|_{\ln \vec{\sigma}_0} \cdot \delta \ln \vec{\sigma} = \vec{d} - \vec{d}_0. \quad (2.18)$$

Cette équation est formée d'un système  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , où  $\mathbf{A}$  est la matrice des dérivées de Fréchet,  $\mathbf{b}$  le vecteur erreur,  $\mathbf{x}$  le vecteur des inconnues représentant dans le problème le  $\delta \ln \vec{\sigma}$  à appliquer aux paramètres afin de mieux ajuster le modèle de conductivité aux données. L'équation (2.18) s'écrit sous forme matricielle développée :

$$\begin{pmatrix} M_{1,1} & \vdots & \vdots & M_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & M_{i,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{M,1} & \vdots & \vdots & M_{M,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \ln \sigma_1 \\ \vdots \\ \delta \ln \sigma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \widehat{d}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_M - \widehat{d}_M \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

En exprimant les dérivées de Fréchet :

$$\begin{pmatrix}
\frac{\widehat{d}_1(\ln \sigma_1 + \delta \ln \sigma_1) - \widehat{d}_1(\ln \sigma_1)}{\delta \ln \sigma_1} & \vdots & \vdots & \frac{\widehat{d}_1(\ln \sigma_N + \delta \ln \sigma_N) - \widehat{d}_1(\ln \sigma_N)}{\delta \ln \sigma_N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \frac{\widehat{d}_i(\ln \sigma_j + \delta \ln \sigma_j) - \widehat{d}_i(\ln \sigma_j)}{\delta \ln \sigma_j} & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\widehat{d}_M(\ln \sigma_1 + \delta \ln \sigma_1) - \widehat{d}_M(\ln \sigma_1)}{\delta \ln \sigma_1} & \vdots & \vdots & \frac{\widehat{d}_M(\ln \sigma_N + \delta \ln \sigma_N) - \widehat{d}_M(\ln \sigma_N)}{\delta \ln \sigma_N}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \ln \sigma_1 \\ \vdots \\ \delta \ln \sigma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \widehat{d}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_M - \widehat{d}_M \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas nous imposons une variation unitaire des valeurs de conductivités ainsi les termes de la matrice  $A$  se restreignent à :

$$\widehat{d}_i(\ln \sigma_j + \delta \ln \sigma_j) - \widehat{d}_i(\ln \sigma_j). \quad (2.20)$$

L'algorithme du problème direct intègre déjà des procédures permettant de résoudre ce type de système linéaire. Ainsi il semble judicieux de les utiliser, c'est pourquoi ce système linéaire est résolu par une décomposition en valeurs singulières (SVD) (cf. sec. 1.3.5, p. 34).

#### 2.3.4. Affinage de la grille.

Une phase critique de notre méthode inverse est le choix des blocs devant être redécoupés. En effet, lorsque la structure est fixée (par ex. lors d'inversion par essai-erreur), il est relativement simple, rapide et fiable d'obtenir les valeurs de conductivités des différentes zones du modèle. Les méthodes de Monte-carlo sont bien adaptées à ce type de problème, ceci étant essentiellement lié à une baisse du nombre de paramètres, voire à une unicité de la solution retrouvée. Cependant, définir la structure du modèle est relativement délicat, et donc influencera fortement le processus d'inversion.

Notre approche multi-échelle adaptative permet de réellement obtenir ces deux informations, la structure et les valeurs de conductivité, en deux étapes bien distinctes. Ainsi, le redécoupage des blocs peut être vue comme la génération de la structure du prochain

modèle de conductivité. Ce modèle aura également la possibilité de remanier sa structure lors de la phase de recuit simulé, qui peut être considérée comme la recherche de la distribution de conductivité optimale pour la structure donnée. Cependant, on veut obtenir une méthode suffisamment rapide, il ne faut donc pas réaliser trop d'étapes supplémentaires en sus du recuit simulé, cette phase, le recuit simulé, devant rester la phase primordiale de la méthode inverse.

Il n'est pas évident de déterminer un paramètre représentatif de la "qualité" d'un bloc, cependant l'information que doit fournir ce paramètre est relativement simple à définir. Il doit permettre de savoir si le bloc explique suffisamment les données ou si sa division permettra de mieux expliquer certaines données. A partir de cette définition on a décidé d'étudier la sensibilité de chaque bloc du modèle vis-à-vis des données afin de décider du redécoupage de certains blocs du modèle. En fait, cette étude est sensiblement la même que celle réalisée lors de l'initialisation des blocs créés par le redécoupage de la cellule mère. La seule différence réside dans le fait que le terme qui nous intéresse n'est plus le vecteur des perturbations ( $\delta \ln \vec{\sigma}$ ) mais la matrice des dérivées :

$$A_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \ln \vec{\sigma}} M(\ln \vec{\sigma}) \big|_{\ln \vec{\sigma}_0} . \quad (2.21)$$

Si la perturbation appliquée est unitaire, la sensibilité d'un bloc  $j$  à la  $i^{eme}$  donnée est simplement obtenue par :

$$s_{j,i} = \hat{d}_i(\ln \sigma_j + \delta \ln \sigma_j) - \hat{d}_i(\ln \sigma_j), \quad (2.22)$$

le premier terme du membre de droite représente la  $i^{eme}$  donnée obtenue sur le modèle donc le bloc  $j$  est perturbé de  $\delta \ln \sigma_j$ . Ainsi l'équation (2.22) exprime simplement une différence entre les données simulées obtenues sur le modèle initial et celles du modèle perturbé.

Le résultat est un vecteur de sensibilité  $s_j$  pour chaque bloc dont la dimension est égale au nombre de données ( $N$ ). Afin d'obtenir une valeur simple à apprécier, une moyenne des composantes du vecteur est réalisée. Ainsi la valeur de sensibilité d'un bloc est donnée par :

$$s_j = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{d}_i(\ln \sigma_j + \delta \ln \sigma_j) - \hat{d}_i(\ln \sigma_j)}{N}. \quad (2.23)$$

Il est difficilement justifiable de définir un seuil de sensibilité à partir duquel la décision d'affiner le bloc peut être prise. En effet, les valeurs de sensibilité varient sur plusieurs ordres de grandeurs en fonction de divers paramètres : la taille de la grille, le dispositif d'acquisition, les contraintes de conductivités, etc... En conséquence, cette étude est un guide pour l'utilisateur qui pourra intégrer d'autres données (modèle inverse courant, pseudo-section, *a priori* sur le terrain géologique, etc...) pour prendre la décision de diviser le bloc.

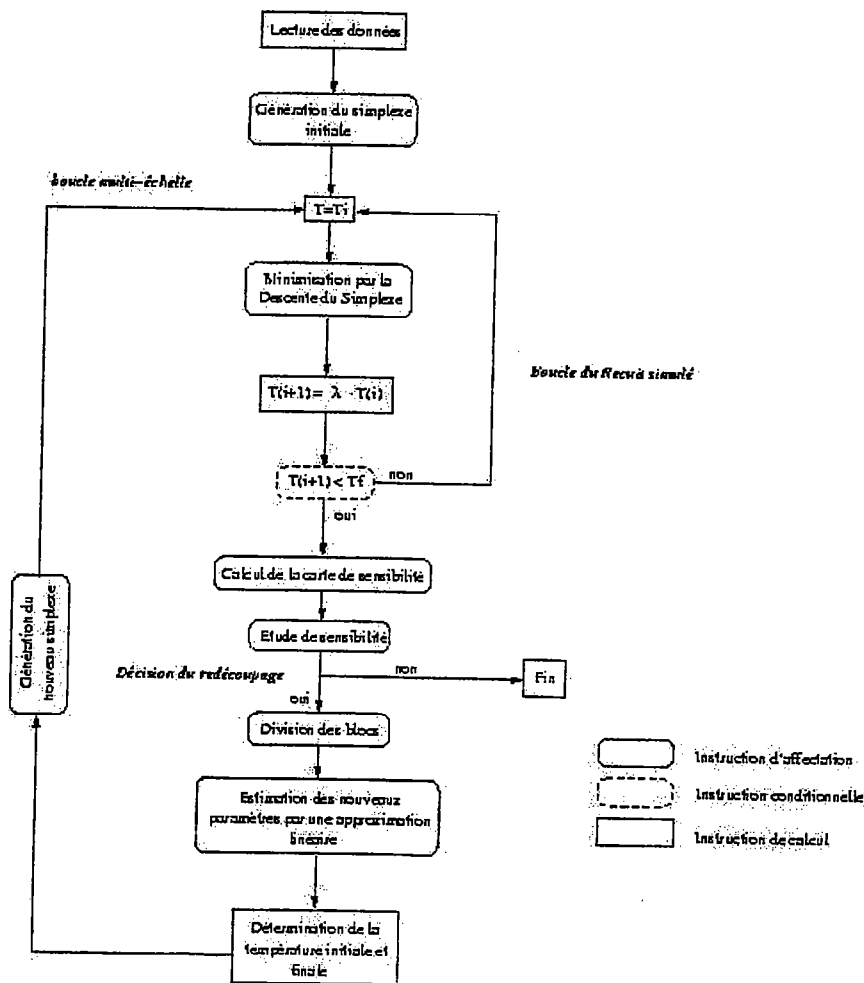


FIG. 2.9. — Schéma de l'algorithme complet du processus d'inversion.  $T_i$  : température initiale,  $T_f$  : température finale,  $T$  : température courante.

## 2.4. L'algorithme d'inversion.

Tous les points nécessaires à l'inversion multi-échelle ont été abordés et l'algorithme final peut être élaboré (cf. fig. (2.9)). La structure repose sur deux boucles, celle initiée par le recuit simulé (consistant en un refroidissement contrôlé) et celle contrôlant la division des blocs, c'est-à-dire l'inversion multi-échelle.

Après la lecture des données (issus des modèles synthétiques ou des mesures de terrain) le premier simplexe est généré. Dans le cas de modèle synthétique, tous les modèles nécessaires au simplexe ( $N+1$ , où  $N$  est le nombre de paramètres) sont choisis aléatoirement. En fait, le premier simplexe n'a que deux points, puisque le processus d'inversion commence par la recherche de la résistivité homogène. Dans le cas d'étude de données réelles (cf. ch. 3, p. 84), il est judicieux d'introduire les informations *a priori* en notre possession. Ainsi, le premier modèle est une réplique de la pseudo-section de résistivité apparente, dont des zones ont été moyennées afin de réduire le modèle au nombre de paramètres nécessaires.

Les autres points du simplexe sont des perturbations aléatoires de ce premier modèle. Ceci permet d'utiliser l'information contenue dans les pseudo-sections de résistivité apparente, sans réduire le domaine de recherche des modèles dans l'espace des solutions. Ce point est particulièrement important, comme nous le verrons lors de l'inversion de données réelles (cf. chap. 3).

Le processus d'inversion est alors amorcé par la première boucle de recuit simulé, qui elle-même comprend une minimisation multi-paramètres implémentée par une méthode de descente du simplexe.

L'étude de sensibilité est réalisée pour chaque bloc, et fournit ainsi une carte de sensibilité, qui permet alors, en fonction du modèle inverse fourni et de la sensibilité de chaque bloc de décider quels blocs sont susceptibles de permettre une amélioration du modèle par une phase de redécoupage. L'étape suivante consiste alors à estimer par approximation linéaire (les coefficients de la matrice  $A$ , cf. eq. 2.19, ayant été obtenus par l'étude de sensibilité) les paramètres supplémentaires (i.e. les blocs issus d'un affinage d'une maille mère).

La dernière étape concerne l'affectation de la nouvelle valeur de température initiale et finale. L'étude de l'évolution du coût du modèle précédent en fonction de la température permet en général de déterminer une température critique. La température finale étant alors fixée inférieure de quelques ordres de grandeur pour les modèles synthétiques et fonction de l'erreur (niveau de bruit) des données dans le cas d'une inversion sur des données réelles.

Une nouvelle itération peut commencer après la génération du nouveau simplexe initial, dont les deux premiers modèles sont respectivement le modèle précédent et le modèle obtenu après le redécoupage et l'approximation linéaire. Les autres modèles sont créés par une perturbation aléatoire de ces deux modèles. Ce point est abordé un peu plus précisément dans la partie suivante qui concerne des inversions sur des modèles synthétiques simples afin de mettre en évidence les points précédents.

## 2.5. Tests synthétiques.

### 2.5.1. Exemples synthétiques simples.

La figure (2.10) montre les résultats et les diverses étapes du processus d'inversion sur un modèle synthétique (fig. 2.10a) constitué de 4 parties, dont 3 sont de conductivité très proche (1, 0.5 et 0.33 S/m), le quatrième secteur du modèle possède une conductivité plus forte d'un ordre de grandeur (10 S/m). Le dispositif d'acquisition permet un échantillonnage important puisque les électrodes sont situées sur les deux côtés et sur le dessus, simulant ainsi la surface et deux puits. Les trois tomographes du bas de la figure (2.10d, 2.10e et 2.10f) montrent les modèles inverses obtenus après 3 phases d'inversion : le modèle homogène, un modèle à 4 blocs puis le modèle final à 10 blocs.

Le modèle homogène est obtenu très rapidement, en quelques itérations, ceci étant dû à la forme particulière de la fonction coût qui ne présente pas de minima locaux. Cette estimation rapide d'un modèle homogène équivalent permet de donner un ordre de grandeur

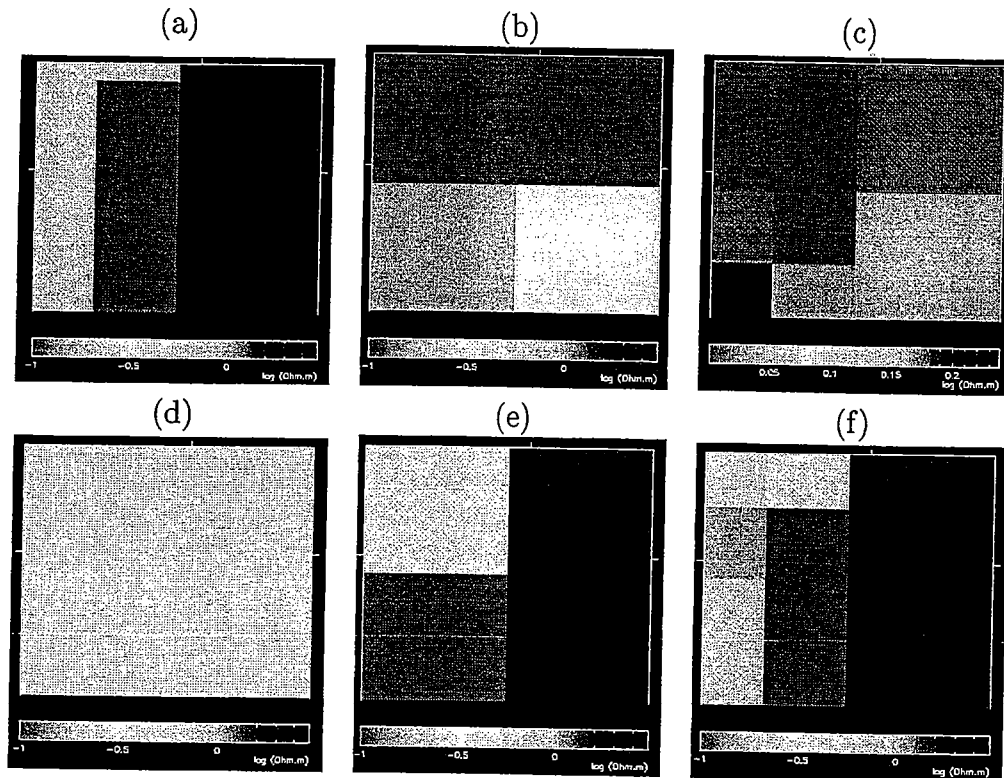


FIG. 2.10. — Exemple d'inversion multi-échelle. (a) Modèle synthétique. (b) Sensibilité : 4 blocs. (c) Sensibilité : 10 blocs. (d) Modèle inverse : 1 bloc. (e) Modèle inverse : 4 blocs. (f) Modèle inverse : 10 blocs.

des conductivités rencontrées.

Cependant, cette conductivité unique est représentative de plusieurs paramètres : la distribution de conductivité, les contrastes de conductivité et le dispositif d'acquisition. Ainsi, même si cette conductivité est représentative des données, il est nécessaire de permettre au modèle de s'éloigner de cette valeur dans les étapes suivantes. Ceci est réalisé, de manière systématique par l'algorithme du recuit simulé, mais peut également être effectué dans le choix du simplexe initial. En effet, après la phase d'affinage de la grille du modèle inverse, il est nécessaire de générer un nouveau simplexe, car des paramètres supplémentaires ont été ajoutés et la dimension de l'espace des modèles a augmenté.

Deux points du simplexe sont relativement simples à initialiser, car ils correspondent respectivement au modèle obtenu à l'étape précédente et à celui obtenu après l'initialisation par approximation linéaire. Ceci permet d'introduire les résultats précédents dans la procédure d'inversion et de lui donner une mémoire. Cependant, il reste  $N - 1$  (où  $N$  est le nombre de paramètres du modèle inverse) points du simplexe à créer. Afin de permettre au processus d'inversion d'explorer un espace des modèles suffisamment grands pour décrire des contrastes de conductivité important, le choix a été de perturber aléatoirement les deux premiers points du simplexe  $\vec{P}^1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1)$  et  $\vec{P}^2(x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2)$  :

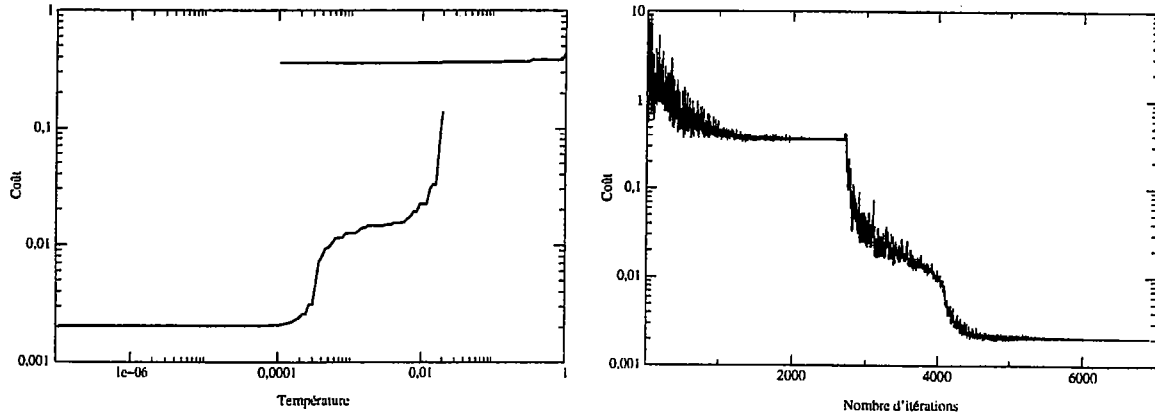


FIG. 2.11. – (a) Evolution du coût du modèle inverse en fonction de la température. La courbe du haut montre cette évolution pour le modèle inverse à 4 blocs, celle du bas pour le modèle inverse à 10 blocs. (b) Evolution du coût du modèle en continu.

$$\vec{P}^i = \vec{P}^1 + \vec{P}^a \quad \text{pour } i \in \left\{3, \frac{N}{2}\right\} \quad (2.24)$$

$$\vec{P}^i = \vec{P}^2 + \vec{P}^a \quad \text{pour } i \in \left\{\frac{N}{2} + 1, N + 1\right\} \quad (2.25)$$

où

$$\vec{P}^a(x_1^a, x_2^a, \dots, x_N^a) = \vec{P}^{1,2}(x_1^{1,2} \pm p, x_2^{1,2} \pm p, \dots, x_N^{1,2} \pm p), \quad (2.26)$$

avec  $p \in [0, 4]$  et tiré aléatoirement.

Cette génération du nouveau simplexe permet au processus d'inversion de disposer pleinement des informations des étapes précédentes et également de s'en écarter afin de tester de nouveaux modèles. Ce point est très important, puisque l'affinage de certains blocs provoque un changement de structure du modèle inverse, lequel peut être en meilleur adéquation avec les données. Il est donc nécessaire que la méthode inverse puisse utiliser cette nouvelle structure avec une gamme importante de conductivité.

La figure (2.11) montre l'évolution du coût du modèle pendant l'inversion. La figure (2.11a) présente l'évolution du coût du modèle en fonction de la température, le graphe (2.11b) montre l'évolution du coût pour la totalité du processus d'inversion des données.

Lors de la dernière étape du processus d'inversion (10 blocs), la température initiale est fixée par la température pour laquelle le coût a fortement diminué à l'étape précédente. Ce choix semble assez judicieux, puisque le coût diminue fortement dès le début, c'est-à-dire à haute température. Ceci peut s'expliquer par plusieurs raisons : le découpage des blocs est suffisamment pertinent pour expliquer correctement les données fournies par le modèle synthétique, les étapes précédentes ont permis de fixer correctement les ordres de grandeur des conductivités, réduisant ainsi considérablement l'espace des solutions, et le dernier



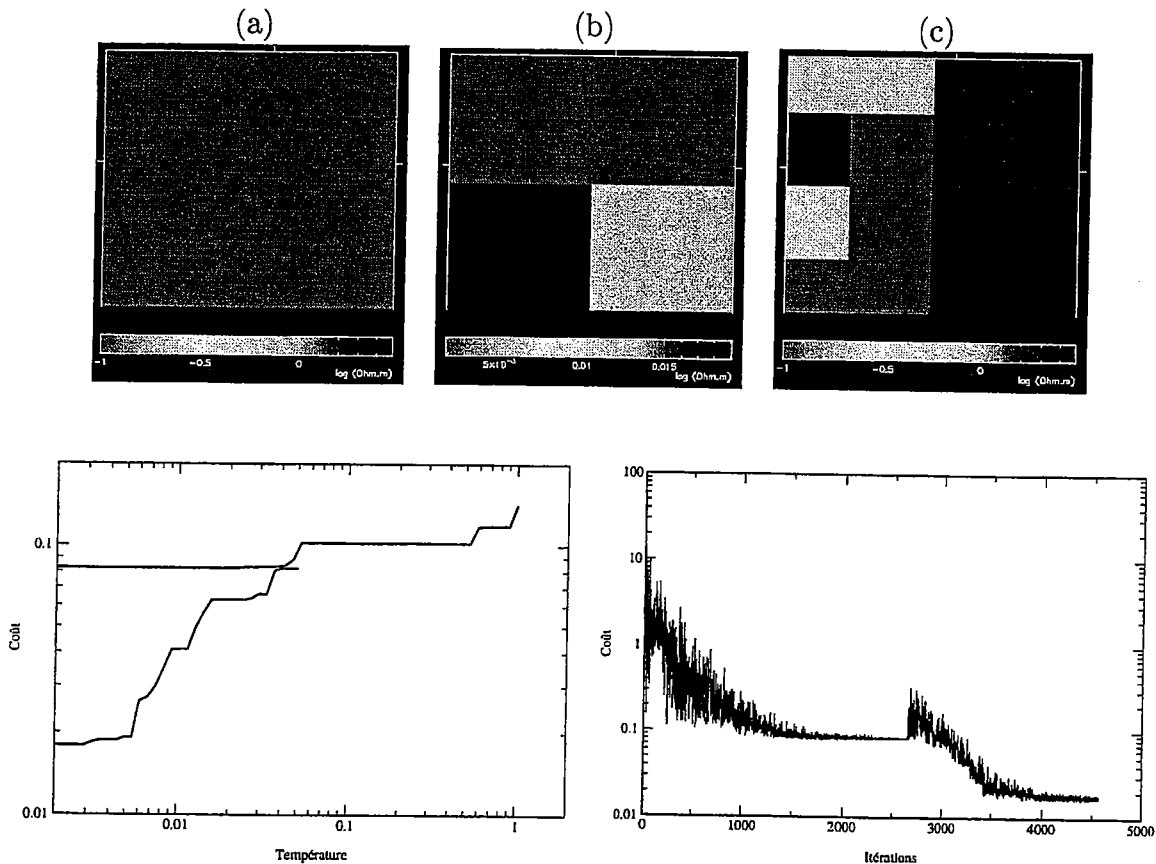


FIG. 2.12. — Exemple d'inversion multi-échelle reprenant le même exemple synthétique que (2.10) mais avec un dispositif d'acquisition différent. Les électrodes ne sont situées que sur un bord, celui du haut. (a) Modèle inverse homogène : 1 bloc. (b) Modèle inverse : 4 blocs. (c) Modèle inverse : 10 blocs. (d) Evolution du coût du modèle en fonction de la température. (e) Evolution du coût pendant la totalité du processus d'inversion.

point étant que la température initiale choisie en fonction de l'évolution de l'inversion à l'étape précédente permet d'obtenir une agitation optimale des modèles dès le début de la recherche.

Les cartes de sensibilité (fig. (2.10b) et (2.10c)) affichent les résultats de l'étude de sensibilité pour les modèles à 4 et 10 blocs. Il apparaît que pour le modèle à 4 blocs, les zones possédant une sensibilité élevée sont celles situées dans la partie supérieure du modèle. Ceci est directement lié au dispositif d'acquisition. Effectivement les électrodes étant situées en surfaces et sur les côtés, les deux blocs supérieurs affectent sensiblement plus les données que ceux situés dans la partie inférieure. Les sensibilités obtenues pour le modèle inverse à 10 blocs présentent sensiblement les mêmes résultats.

La figure (2.12) présente le même type de résultat pour le même modèle synthétique, mais avec un dispositif d'acquisition fournissant un échantillonnage moins important. En effet, les électrodes ne sont positionnées qu'en surface, c'est-à-dire uniquement sur le bord supérieur des modèles. Un point remarquable est le résultat fourni lors de la recherche

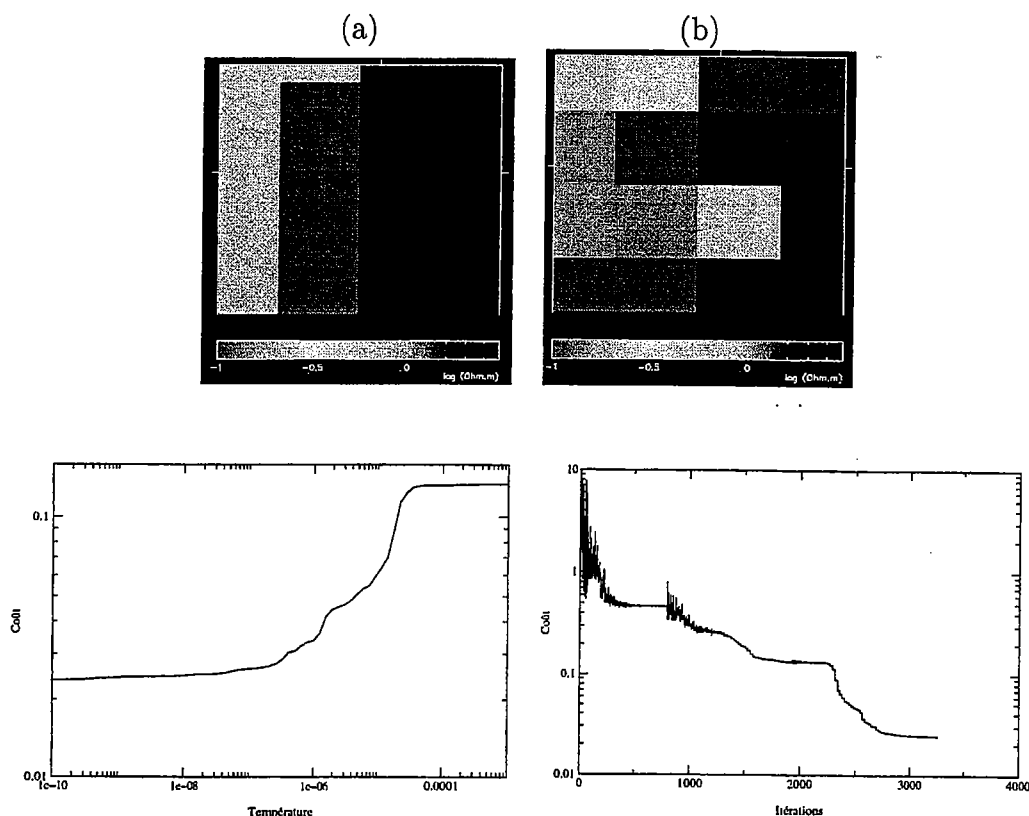


FIG. 2.13. — Exemple d'inversion. (a) Modèle synthétique. (b) Modèle inverse final : 16 blocs. (c) Evolution du coût du modèle en fonction de la température. (d) Evolution du coût du modèle au cours du processus complet de l'inversion.

de la conductivité homogène. Apparemment, le bloc très conducteur a un effet important sur les données et le positionnement des électrodes ne permet pas d'obtenir des données suffisamment pertinentes pour que le milieu englobant (globalement de conductivité très proche) puisse être intégré à la conductivité homogène. En fait, l'inversion fournit un résultat correct uniquement lorsque le découpage permet d'expliquer la structure. Il apparaît donc qu'un échantillonnage insuffisant ne permet pas d'obtenir des données suffisamment pertinentes pour des modèles ne possédant pas une résolution suffisante. Puisque le résultat final montre une structure et des valeurs de conductivités relativement correctes, notamment dans la partie supérieure du modèle, la structure en bloc est alors suffisamment fine pour permettre à la méthode inverse d'obtenir un modèle satisfaisant.

### 2.5.2. Exemple synthétique en accord *a priori* avec les données de Pont-Péan.

Le modèle synthétique utilisé pour cet exemple est un modèle reproduisant schématiquement un milieu composé de deux terrains géologiquement différents et séparés par une faille possédant un filon métallifère (fig. (2.14)). Cette distribution de la conducti-

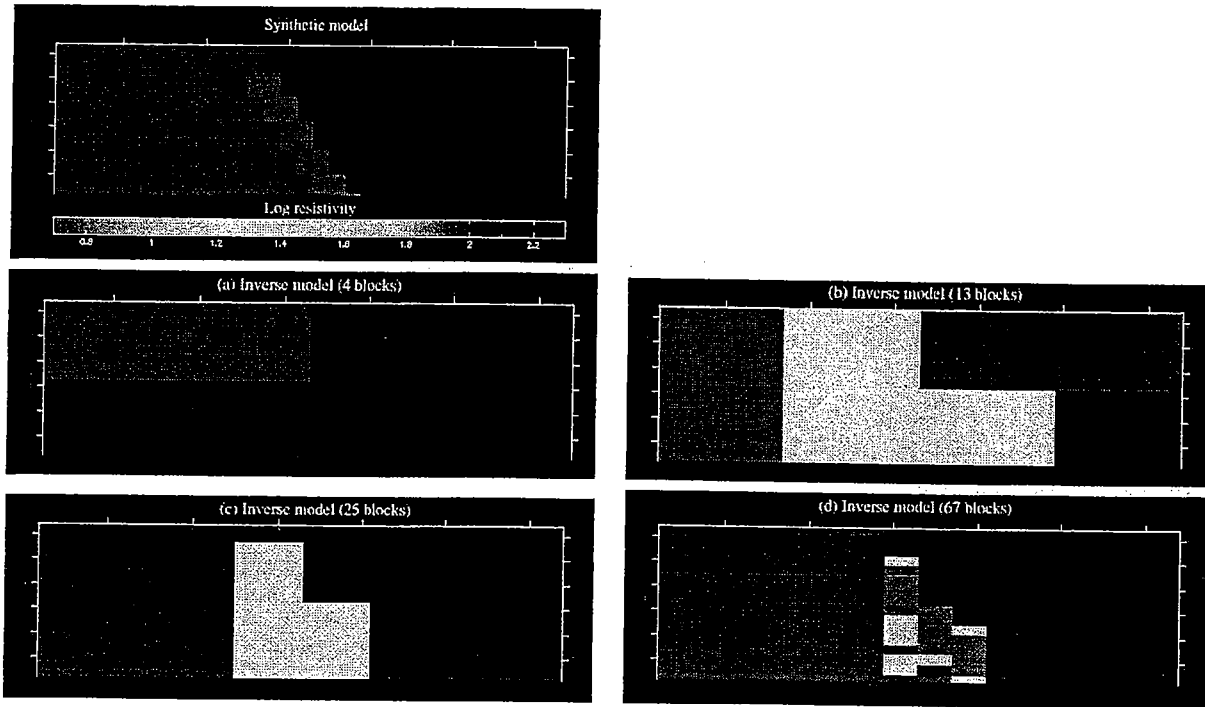


FIG. 2.14. — Résultats d'inversion. Modèle synthétique en haut à gauche. (a) Modèle inverse à 4 blocs. (b) Modèle inverse à 13 blocs. (c) Modèle inverse à 25 blocs. (d) Modèle inverse final à 67 blocs.

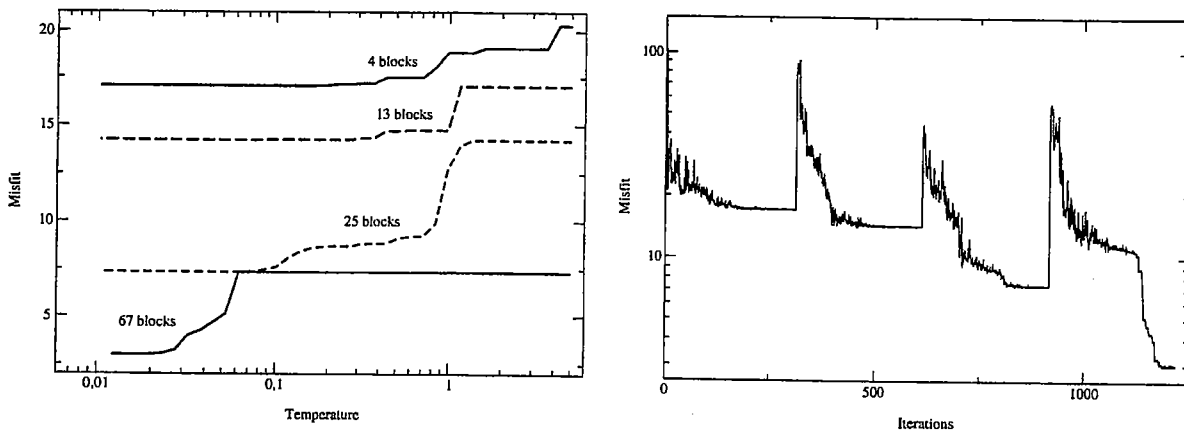


FIG. 2.15. — (a) Evolution du coût du modèle en fonction de la température. (b) Evolution du coût du modèle lors du processus complet d'inversion.

tivité illustre ainsi une structure multi-échelle avec de larges zones homogènes et de petites hétérogénéités. La dimension de la grille est ( $N=32 \times 32$ ) et le maillage est régulier. Le compartiment gauche du modèle de résistivité a une résistivité de  $100 \Omega.m$ , le compartiment supérieur droit possède une résistivité de  $200 \Omega.m$  et le compartiment inférieur droit une résistivité de  $150 \Omega.m$ . Le filon métallifère possède une résistivité de  $5 \Omega.m$ .

Les données synthétiques sont générées avec un dispositif de type puits-puits et surface. L'injection est fournie par un dipôle, et afin d'obtenir une importante collection de mesures, toutes les autres électrodes sont utilisées en tant qu'électrode de potentiel. Chaque bord du modèle possédant des électrodes du modèle de résistivité reçoit 5 injections. Ainsi l'acquisition des données consiste en 15 injections avec chacune 94 mesures de potentiel électrique. Cette disposition fournit donc un nombre total de 1410 mesures de différences de potentiel électrique.

Comme il a été expliqué précédemment (cf. sec. 2.2.2, p. 60), le choix du critère de calcul de la fonction coût est fonction du type de données que nous possédons. Les données synthétiques obtenues ne contiennent aucun bruit afin de permettre à l'algorithme d'avoir un comportement optimal, la non-linéarité du problème provoquant déjà une fonction coût multimodale. Ainsi le choix de la norme  $\ell_2$  avec une variance unitaire semble bien appropriée.

Le processus d'inversion commence par la recherche de la résistivité homogène (modèle à un bloc) qui est déterminée très rapidement. Les figures (2.14a-d) présentent les résultats finaux des quatre étapes d'inversion, la taille des blocs de chaque modèle varie de  $1/2$  à  $1/16$  de la taille du modèle. La seconde étape, après la recherche de la conductivité homogène, fournit un modèle à 4 blocs (fig. (2.14a)) bien représentatif de la structure grossière du modèle synthétique. Le modèle est alors partiellement rééchantillonné (division partielle des blocs) et le bloc supérieur droit est conservé intact (cf. fig. (2.14b)). Ainsi le nombre total de blocs est de 13, au lieu de 16 pour une division de tous les blocs du modèle précédent. Par la suite, l'affinage permet de localiser correctement le filon tout en gardant un nombre minimal de paramètres. En effet le modèle inverse final possède 67 paramètres (blocs) alors la grille complète représente 252 paramètres.

L'évolution du coût des modèles lors du processus d'inversion est montrée sur les graphes de la figure (2.15). Le graphe (2.15a) montre l'évolution du coût des modèles au cours de chacune des quatre phases de refroidissement, tandis que le graphe (2.15b) présente l'évolution du coût des modèles générés successivement pendant le processus d'inversion *via* la perturbation contrôlée par la descente de simplexe. Les températures initiales et finales sont respectivement fixées à 5 et  $10^{-2}$ .

Les séquences de refroidissement montrent souvent plusieurs températures critiques, par exemple celle correspondant à la recherche du modèle à 4 blocs. Un tel comportement est souvent observé lorsqu'il existe une hiérarchie dans les paramètres définissant les modèles inverses ([Gibert and Virieux, 1991]). En l'occurrence, il est probable que les blocs proches de la surface aient une plus grande importance vis-à-vis des données et soient donc résolus en premier. Cette étape correspond à la première décroissance du coût à  $T = 4$ , la solution étant alors progressivement ajustée, puis à  $T = 1$ , une seconde température critique permet alors d'ajuster la totalité des paramètres du modèle.

Afin d'éviter un confinement des modèles inverses dans des minima locaux, la température initiale est toujours réinitialisée à 5. Ceci est parfaitement visible sur la courbe montrant l'évolution du coût des nouveaux modèles générés pendant le processus d'inversion (cf. fig. (2.15b)), à chaque rééchantillonnage du modèle (division des blocs), une augmentation du coût des nouveaux modèles générés est observée pendant un certain nombre

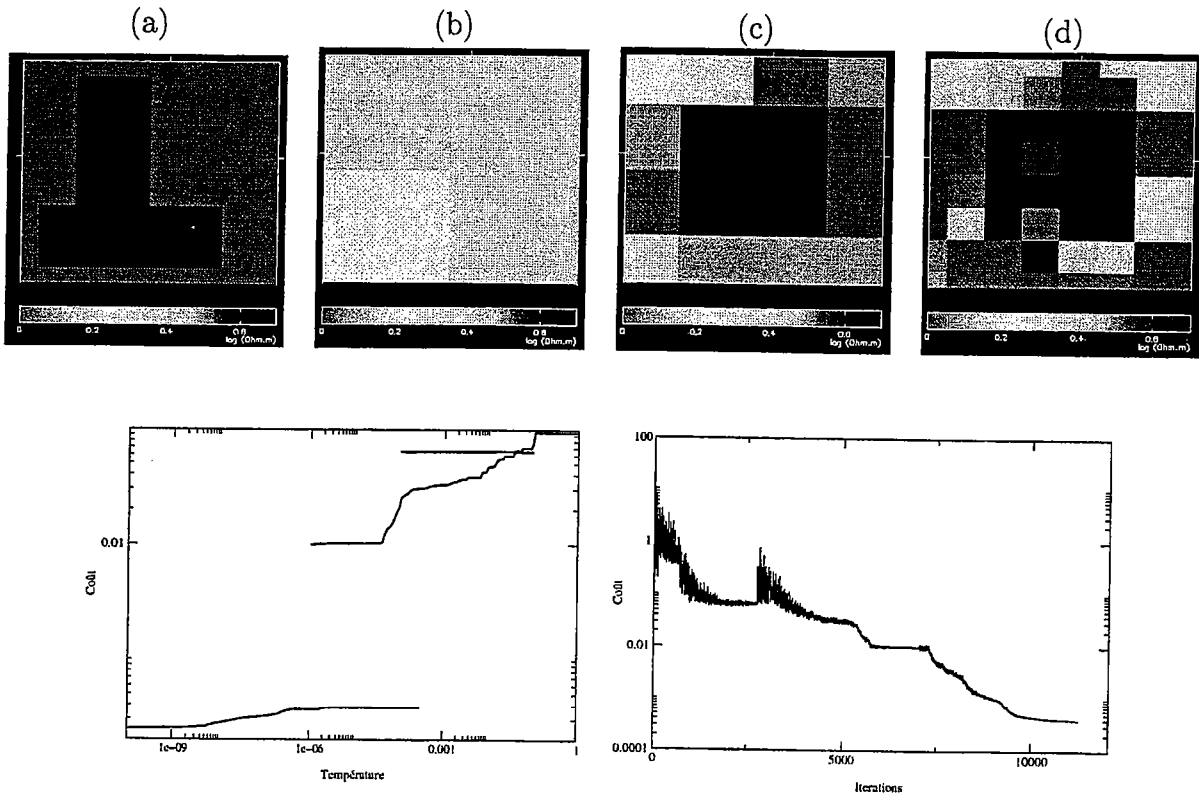


FIG. 2.16. — Exemple d'inversion. (a) Modèle synthétique. (b) Modèle inverse : 4 blocs. (c) Modèle inverse : 16 blocs. (d) Modèle inverse : 46 blocs. (e) Evolution du coût du modèle en fonction de la température. (f) Evolution du coût du modèle au cours du processus d'inversion.

d'itérations.

### 2.5.3. Autres exemples.

## 2.6. Conclusion.

La méthodologie du processus d'inversion que nous avons décidée de développer a permis d'aborder plusieurs points importants des méthodes inverses : définition de la fonction coût, génération et choix des modèles, paramétrisation du modèle, etc... La souplesse du recuit simulé nous a permis d'implémenter un algorithme d'inversion à paramétrisation adaptative. En fait seule une méthode d'inversion pleinement non-linéaire était envisageable pour définir une telle paramétrisation qui rend le problème fortement non-linéaire.

Cette première approche d'une paramétrisation multi-échelle met en évidence un intérêt majeur pour l'inversion des données de champs de potentiel électrique en séparant la recherche de la structure du modèle et les valeurs de conductivité. Cependant, cette séparation n'est pas totalement maintenue, ce qui permet d'entretenir une interaction entre ces deux informations. En effet, des changements de conductivité peuvent impliquer une modification de la structure du modèle et inversement ; des variations de conductivité peuvent

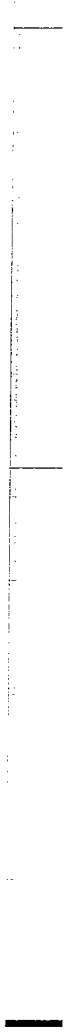
influencer le modèle vers une nouvelle structure des blocs de conductivité.

L'effet le plus visible d'une paramétrisation adaptative est certainement la décroissance rapide de la fonction coût lorsque le nombre de blocs et leurs dimensions permettent d'expliquer correctement le modèle synthétique initiale. Cependant, souvent plusieurs températures critiques sont observées lors des phases complètes de refroidissement, ce qui peut s'expliquer par une hiérarchie de l'importance des paramètres représentant le modèle ([Gibert and Virieux, 1991]).

Le choix des températures initiale et finale est également important lors d'une inversion par recuit simulé. Deux stratégies différentes ont été employées. Ainsi l'idée de prendre comme température initiale la température critique (i.e. la température pour laquelle le coût du modèle a évolué significativement) à l'étape précédente paraît être relativement judicieuse. Elle permet alors de démarrer le processus de refroidissement à une température en adéquation avec l'agitation nécessaire pour la génération de nouveaux modèles. Cependant, ce choix peut ne pas être pertinent pour l'inversion de certains modèles. Dans ce cas, il peut être intéressant de procéder à une nouvelle agitation importante (reannealing) des modèles. Ce choix, s'il permet d'explorer un maximum de solutions, ne détruit pas les résultats précédents dans le cas où cette agitation importante ne permet pas d'obtenir un meilleur modèle. Effectivement, le simplexe permet de garder "*en mémoire*" les modèles obtenus précédemment et le seul effet du reannealing sera une augmentation du temps de calcul. Cette méthode a été utilisée avec des résultats corrects lors de l'inversion du modèle en accord *a priori* avec les données acquises sur la commune de Pont-Péan.

## Deuxième partie .

### Application et Exemple de Terrain





## 3. Les mines de Pont-Péan.

### 3.1. Contexte géologique.

Les mines de Pont-Péan sont situées à une dizaine de kilomètres au Sud de Rennes. Ces mines sont considérées comme le plus important filon plombo-zincifère du Massif Armoricain, son exploitation est attestée dès 1630. La mine a été fermée en 1904, après avoir atteint 600 mètres de profondeur, en raison d'une inondation des galeries. De nouvelles études et recherches ont été effectuées en 1928-1930 sur le prolongement sud de la structure, puis en 1959 sur un filon perpendiculaire partant vers l'Ouest. Ces deux tentatives se sont soldées par un échec. Au total, ce sont 26 puits qui ont été creusés pour la reconnaissance et l'exploitation du filon.

La mise en place du filon doléritique est directement liée à un événement décrochant dextre, de direction approximative Nord-Sud avec un pendage de  $80^\circ$  vers l'Est. L'épaisseur du filon varie de 12 à 30 mètres. Cet accident d'une vingtaine de kilomètres de long affecte les formations du Briovérien et du Paléozoïque jusqu'au Silurien. La dolérite ne semble pas avoir rempli la faille dans sa totalité, ainsi le filon s'étend sur environ 4 km. La minéralisation du filon s'est essentiellement orientée vers la formation de blende (sulfure de zinc), galène (sulfure de plomb) et pyrite (sulfure de fer).

La géologie relativement simple localement (cf. fig. (3.1)) permet une bonne approximation 2-D. En effet, le filon sépare deux blocs : des schistes briovériens à l'ouest et un bassin sédimentaire tertiaire composé essentiellement de sables et d'argiles à l'est. L'épaisseur des sédiments éocènes au dessus du filon est estimée à environ 80 mètres au niveau du profil de résistivité électrique. Ainsi le filon n'est pas visible en surface. Cependant, une faille est associée à ce filon ainsi qu'une forte circulation d'eau. Ceci doit, normalement, permettre d'observer une trace de la faille liée à des variations de résistivité et à la présence d'eau.

La circulation d'eau dans le secteur du filon est probablement importante et il y a de fortes chances pour qu'un profil du potentiel spontané fournisse aussi des informations sur le contact entre les schistes (à l'ouest de la faille) et les sédiments tertiaires (à l'est).

Malgré la proximité d'une agglomération, la zone d'étude est peu industrialisée et les données mesurées sont de bonne qualité, tant du point de vue du rapport signal/bruit que de leur reproductivité. La topographie le long du profil est peu importante et régulière. Le profil présente une légère élévation de terrain en son centre. De chaque côté du profil la progression est relativement douce. Cette élévation donne au maximum un dénivelé de 2 mètres. La longueur du profil étant de 315 mètres, il semble correct de négliger les effets

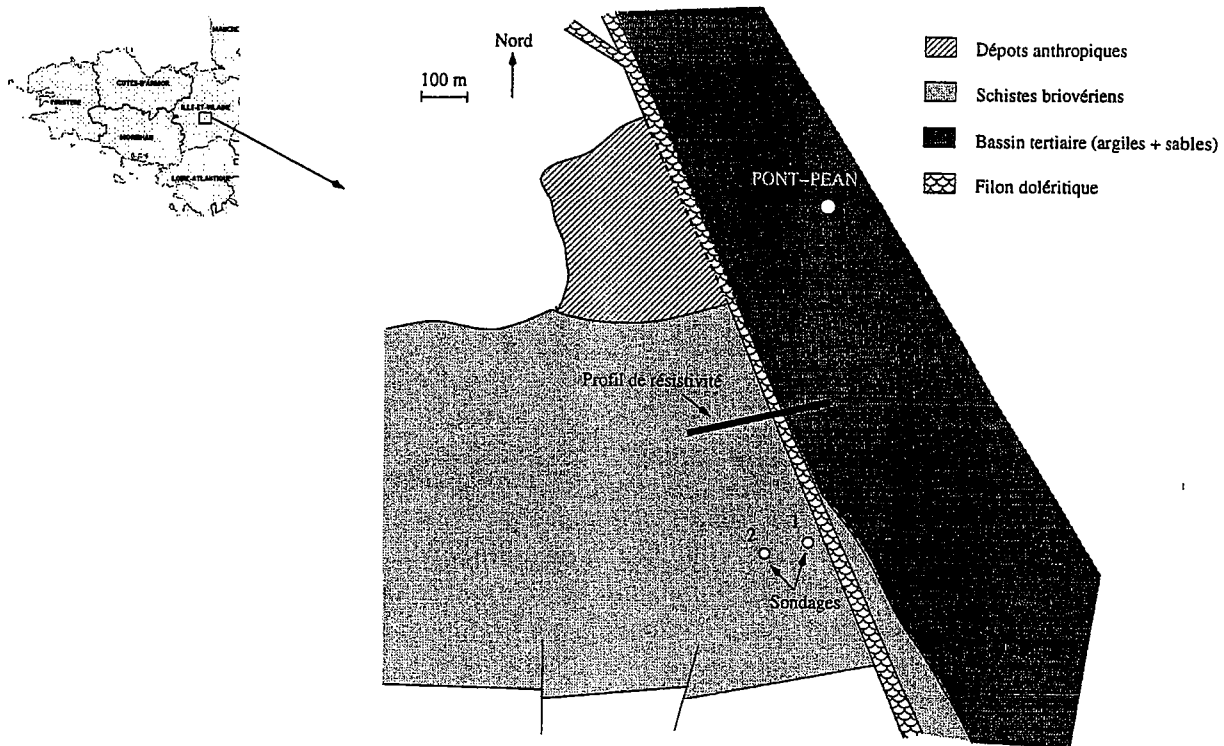


FIG. 3.1. – Schéma géologique simplifié du secteur de Pont-Péan.

topographiques.

### 3.2. Acquisition des données.

Le dispositif multi-électrodes que nous utilisons permet de réaliser très facilement et rapidement des profils de résistivité électrique (cf. photos (3.3)). Cependant, l'appareillage ne permet pas un multi-plexage des mesures de données de potentiel électrique. Ainsi, pour chaque injection de courant nous ne pouvons mesurer qu'une seule différence de potentiel électrique à la fois. Par conséquent, afin d'obtenir un jeu de données assez important tout en optimisant l'acquisition sur le terrain, trois protocoles de mesures classiques ont été utilisés : Wenner, pôle-dipôle et dipôle-dipôle (cf. fig. (3.2)).

L'utilisation conjointe des trois séries de mesures permet de créer une redondance de certains points d'injection de courant et d'obtenir plusieurs mesures de différences de potentiel électrique pour un dipôle d'injection. Ainsi lors de la résolution du problème direct pour une injection donnée, nous obtiendrons une information pour plusieurs données.

Les séries de mesures de potentiel électrique sont présentées sur la figure (3.4) dans leur ordre d'acquisition, ce qui explique l'effet de périodicité qui apparaît. Effectivement, les trois profils ont un schéma identique lors de l'acquisition : écartement fixe des électrodes d'injections pendant que l'écartement et le positionnement des électrodes de potentiel varient (cf. fig. (3.2)).

### 3.2. ACQUISITION DES DONNÉES. CHAPITRE 3. LES MINES DE PONT-PÉAN.

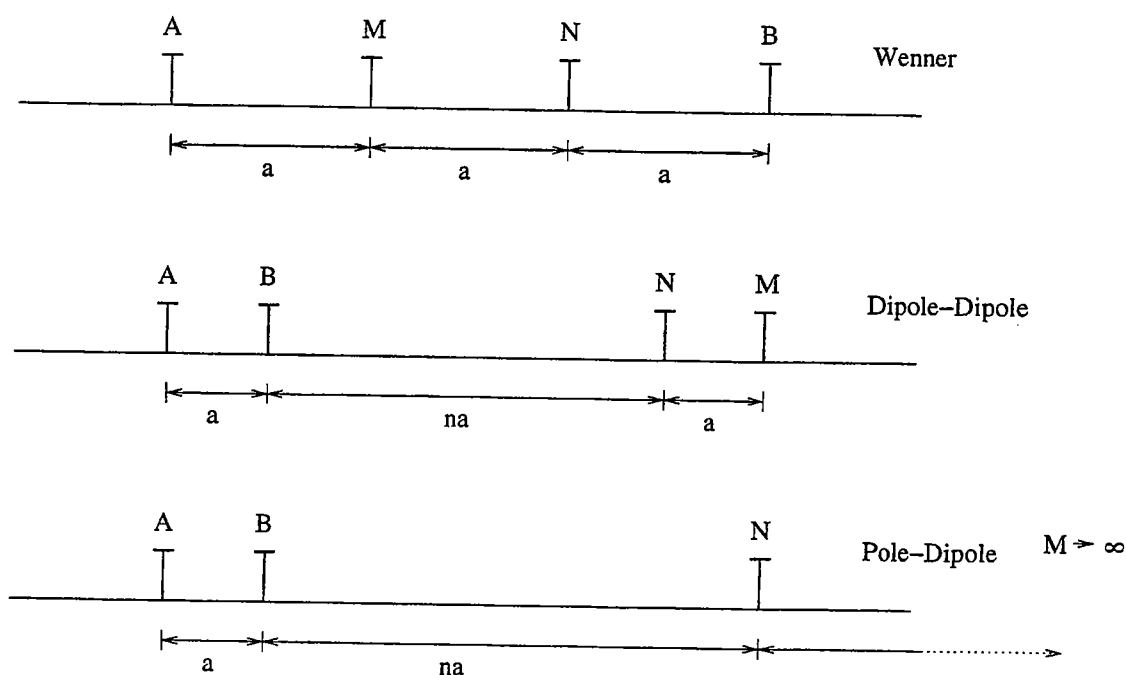


FIG. 3.2. — Exemples de différents dispositifs d'acquisition de données électriques. A et B représentent les électrodes de courant et M et N les électrodes de potentiel.

Les graphes (cf. fig. (3.4)) de la partie inférieure montrent l'erreur sur les mesures de potentiel électrique. Cette erreur est estimée à l'aide des 4 mesures individuelles dont la moyenne constitue la donnée.

A part pour certaines mesures du dispositif pôle-pôle, les erreurs ne dépassent pas 1%. Cela est directement lié aux paramètres imposés lors du protocole d'acquisition qui répète les mesures jusqu'à ce que l'erreur soit  $\leq 1\%$ . Si après 16 mesures la convergence n'est pas suffisante la mesure est enregistrée avec une erreur importante. Dans le cas des mesures effectuées lors du protocole d'acquisition dipôle-dipôle, environ 10% des mesures n'ont pas convergées vers des valeurs de potentiel électrique stables. Les écarts entre deux mesures au même point pouvant atteindre plusieurs ordres de grandeurs. Une erreur très faible (i.e.  $< 1\%$ ) est nécessaire afin d'obtenir des données qui contiennent des informations sur la circulation du courant dans le sous-sol. Effectivement, comme il a été vu précédemment (cf. chap. 1, sec. 1.4.3), c'est le potentiel électrique secondaire qui décrit les accumulations de charges électriques et donc fournit des informations sur la distribution de conductivité. Cependant, ce potentiel secondaire est nettement plus faible que le potentiel primaire et, donc, il est important que le niveau de bruit soit faible dans les données.

D'une manière générale, on remarque sur les graphes de la figure (3.4) que les données obtenues par le dispositif dipôle-dipôle présentent les plus importantes erreurs et, ce, pour la totalité des données. Après quelques tentatives d'inversion, nous avons décidé de supprimer les données obtenues par ce dispositif. Effectivement, la prise en compte des données du dispositif dipôle-dipôle semble détruire la cohérence entre les différents jeux de données. Ce type de dispositif présente l'avantage d'une profondeur d'investigation assez importante

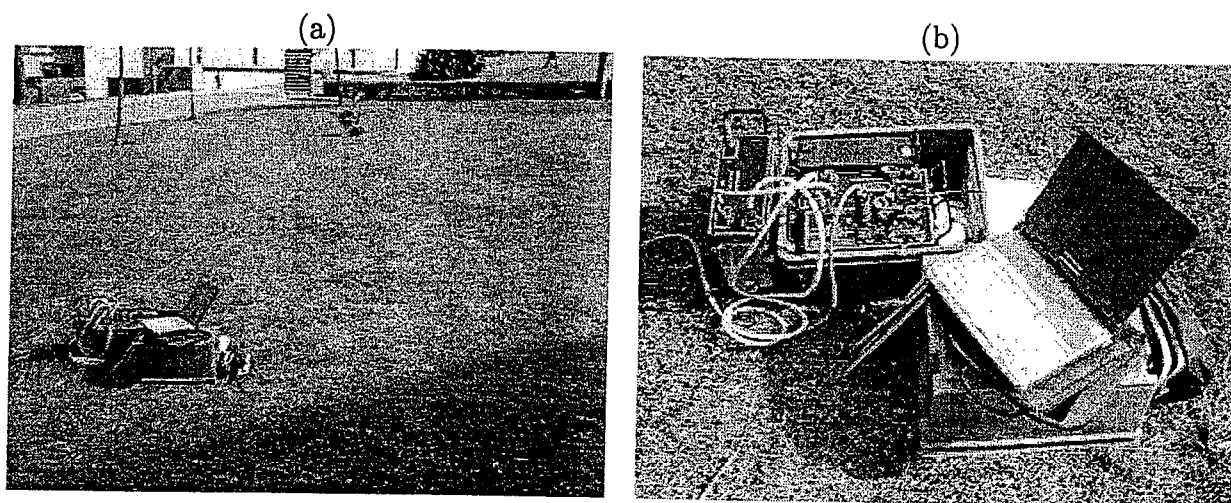


FIG. 3.3. – (a) Dispositif multi-électrodes (b) ABEM Lund SAS400 : ampèremètre, voltmètre.

sans nécessiter la présence d'une électrode à l'infini (dans la pratique  $\simeq 10 \times$  l'écartement maximum entre les électrodes de courant et de potentiel). Cependant ce protocole est le plus sensible au bruit et aux erreurs de mesure, et les données doivent être acquises dans des conditions optimales, ce qui n'était pas notre cas, puisque nous avons eu de nombreux problèmes de couplage électrodes-terrain, problèmes que nous n'avons pas rencontrés lors de l'acquisition avec les deux autres dispositifs.

Un biais existe dans les données pôle-dipôle pour des raisons pratiques car nous n'avons pas pu réaliser deux profils avec une électrode à "l'infini" de chaque côté du profil. Toutes les données ont été obtenues avec l'électrode "infinie" environ 1000 m à l'Ouest du profil. Les terrains les plus résistants étant à l'Ouest, il est probable que ceux-ci produisent alors un rétrécissement de la zone plus conductrice à l'Est ([Ward, 1990] ; [Robain et al., 1999]).

Classiquement on représente les résultats de profil électriques en pseudo-sections où la résistivité apparente pour chaque mesure de potentiel électrique est associée à une profondeur liée à l'écartement des électrodes. Cela permet d'obtenir une image 2-D des données, puisque qu'en faisant varier l'écartement et le positionnement en surface des électrodes, on obtient une série de mesures de résistivité apparente fonction de  $x$  (distance horizontale) et de  $z$  (profondeur).

Les mesures concernent des différences de potentiel  $U$ , et donc l'intensité du courant  $I$  injecté étant fixée, à partir de la loi d'Ohm, le calcul de la résistance  $R$  du terrain est immédiat :

$$R = \frac{U}{I}. \quad (3.1)$$

La résistivité  $\rho$  est directement reliée à la résistance *via* une correction prenant en compte la géométrie des électrodes, qui ne sont pas nécessairement disposées symétriquement :



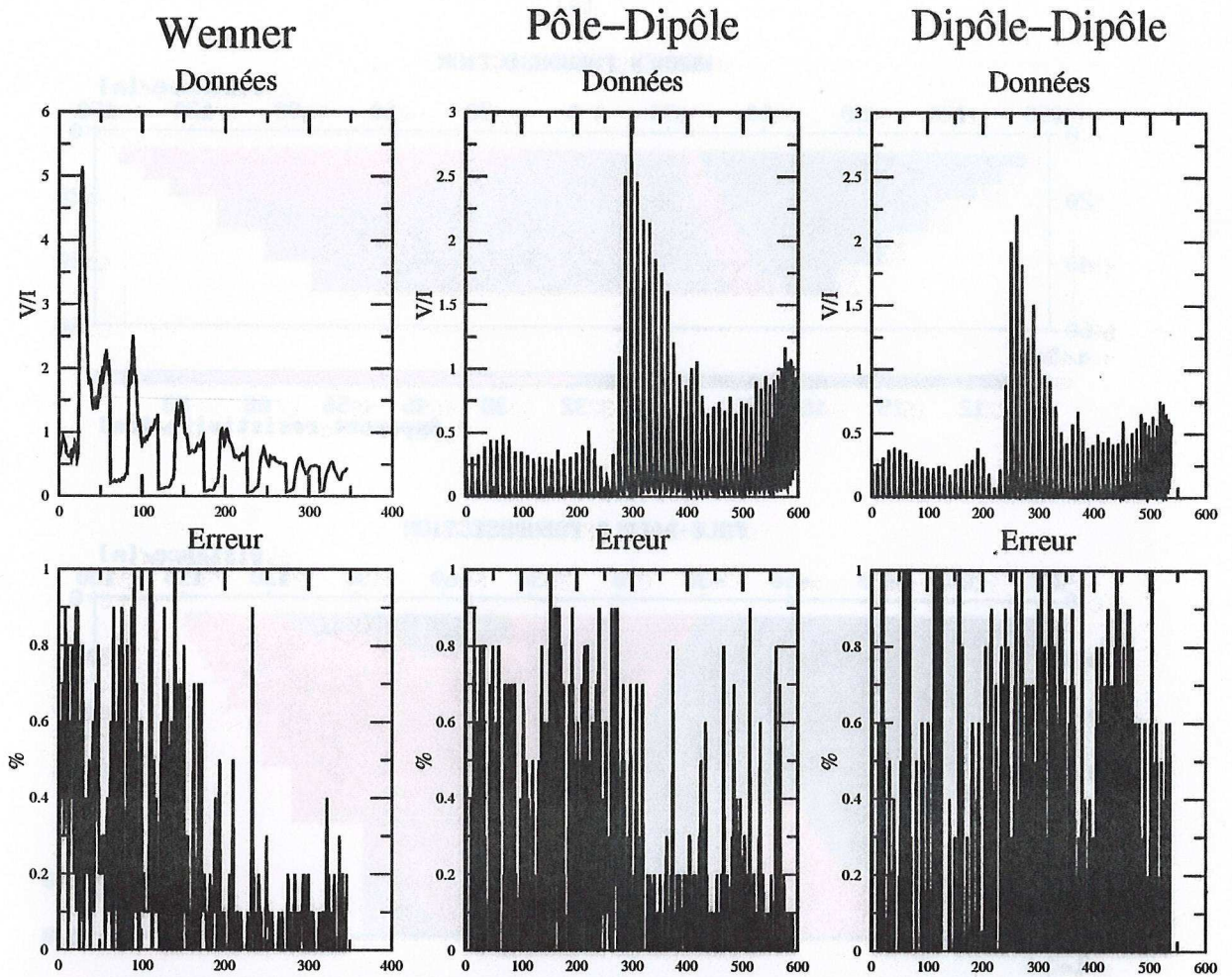


FIG. 3.4. — Trois séries de mesures de potentiel électriques obtenues avec trois dispositifs différents : wenner, dipôle-pôle et pôle-pôle. Les graphes de la partie supérieure donnent les données brutes et les graphes de la partie inférieure l'erreur en pourcentage (max. 1%, car seuil fixé lors de l'acquisition).

$$\rho = K \cdot \frac{U}{I}. \quad (3.2)$$

Dans le cas d'un milieu homogène, cette résistivité est égale à la vraie résistivité, cependant elle est normalement fonction de la contribution de tous les niveaux géologiques. En conséquence cette quantité corrigée géométriquement est appelée résistivité apparente. Le facteur géométrique  $K$  est défini par :

$$K = 2\pi \cdot \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}} \right)^{-1}, \quad (3.3)$$

où  $A$  et  $B$  sont les électrodes d'injection de courant et  $M$  et  $N$  sont les électrodes de potentiel électrique. Les dispositifs classiques (Wenner, pôle-pôle, etc...) permettent d'obtenir des facteurs géométriques très simples ( $K_{wenner} = 2\pi a$  et  $K_{dpp} = 2\pi n(n+1)a$ , pour la



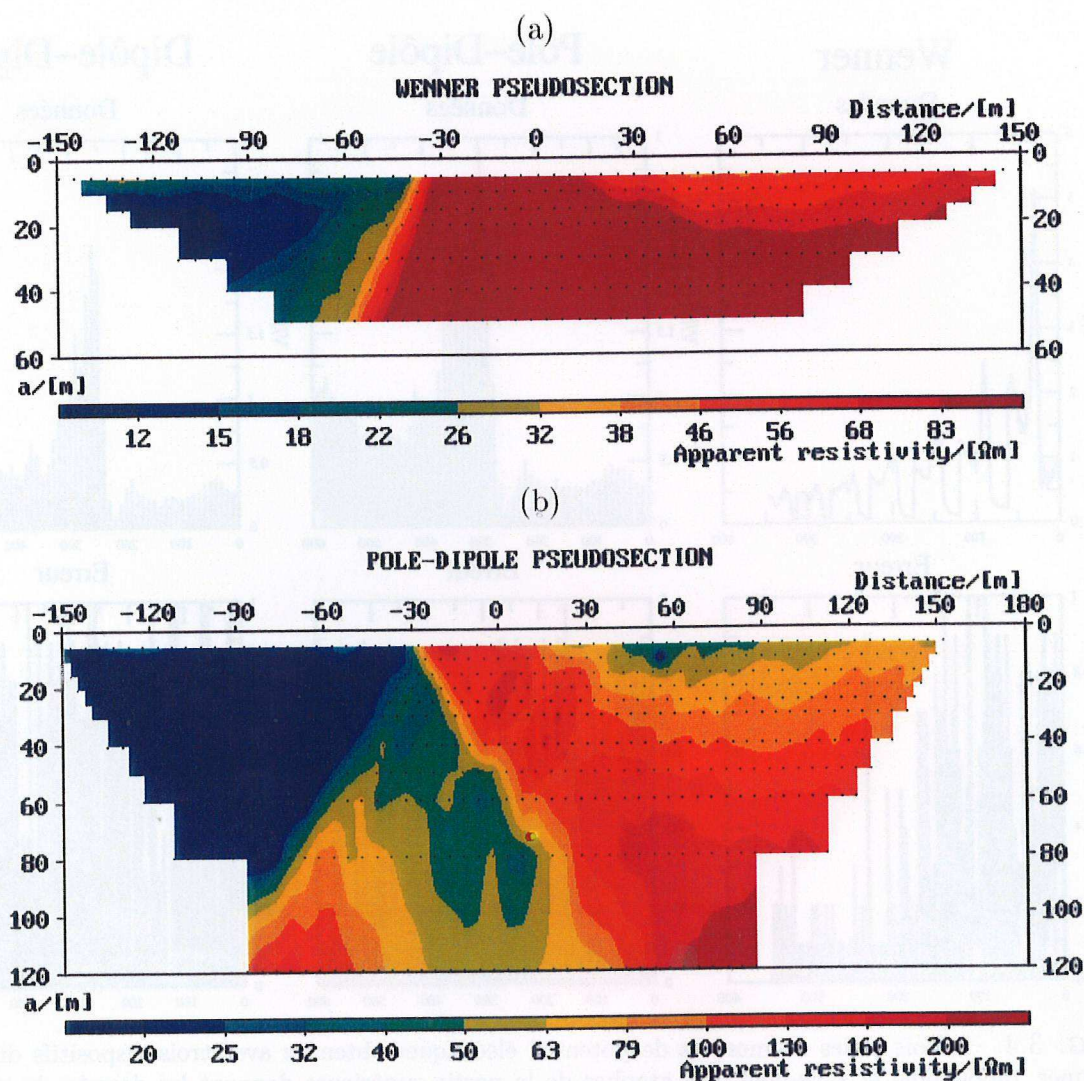


FIG. 3.5. – (a) Pseudo-section issue du profil Wenner. (b) Pseudo-section issue du profil Pôle-Dipôle.

définition de  $n$  et  $a$  voir la figure (3.2)), et de calculer rapidement la résistivité apparente.

Les figures (3.5a) et (3.5b) présentent les deux pseudo-sections obtenues à partir des données mesurées par les dispositifs Wenner et pôle-dipôle. Les deux pseudo-sections montrent globalement deux compartiments, conducteur à l'Est et résistant à l'Ouest, dont la limite est située à  $x = -30$  en surface.

Il est nécessaire de toujours garder à l'esprit que les pseudo-sections de résistivité sont simplement une représentation de valeurs de résistivité apparente qui supposent un milieu homogène ; il ne s'agit donc pas d'une coupe de la vraie résistivité du milieu. Un des biais les plus communs dans ce type de représentation est, par exemple, une forte distorsion des couches selon leur conductivité et leur position relative.

Topologie de la grille de resistivite

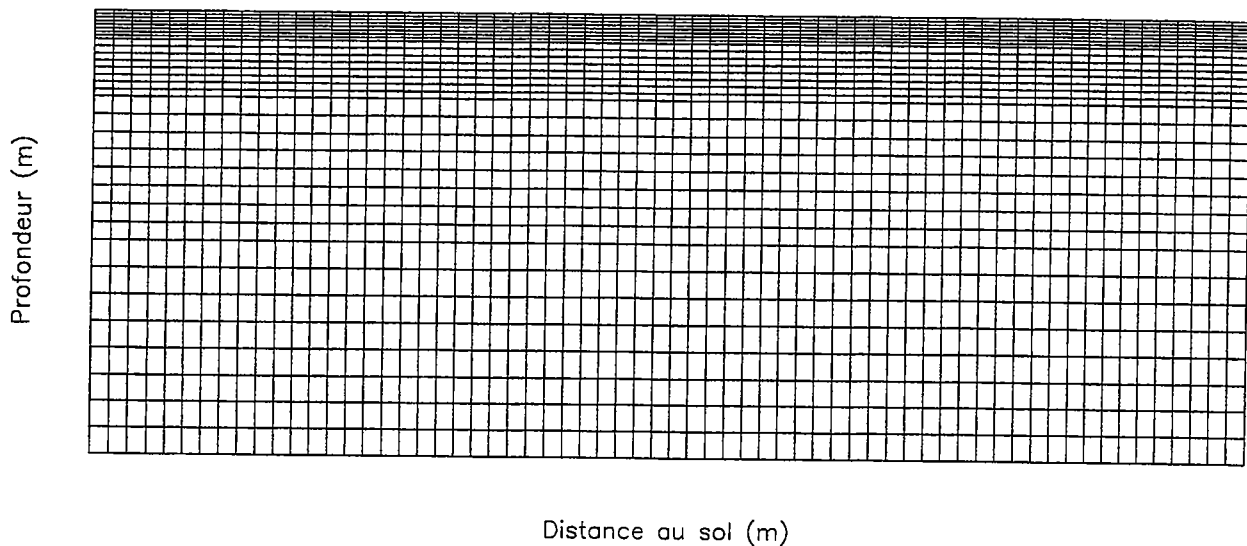


FIG. 3.6. – Topologie de la grille de résistivité utilisée lors de l'inversion. La dimension des mailles selon  $x$  (distance au sol) est régulière et égale à 5 mètres, selon la profondeur elle varie de 1 à 7,5 mètres.

### 3.3. Inversion

#### 3.3.1. Paramètres d'inversion.

L'inversion des données de Pont-Péan suit la même procédure que celle utilisée lors de l'inversion des données synthétiques. Cependant, quelques paramètres sont ajustés afin d'adapter les diverses étapes du processus d'inversion plus précisément au problème.

Les acquisitions des données électriques n'ont été réalisées qu'en surface et nous avons construit une grille de résistivité *a priori* de maille irrégulière permettant une meilleure résolution à proximité de la surface (cf. fig. (3.6)). Les dimensions des mailles varient avec la profondeur, permettant ainsi d'obtenir un maillage serré ( $dz = 1$  m) près de la surface, puis nettement plus grossier en profondeur ( $dz = 7,5$  m). La grille de résistivité est donc une grille  $64 \times 32$  représentant une coupe 2-D de 315 mètres de long et de 88 mètres de profondeur.

Afin de prendre en compte d'éventuelles données aberrantes (mauvais couplage électrodes-terrain) dans les séries de mesures de différences de potentiel électrique, une norme  $\ell_1$  est utilisée dans le calcul de la fonction coût. Cette norme suppose que la distribution de probabilité *a posteriori* des erreurs commises sur les mesures suit une distribution de Cauchy ([Tarantola, 1987]).

Les erreurs et les séries de données de potentiel de la figure (3.4) permettent de définir la température finale des phases de refroidissement du recuit simulé. En effet, les barres d'erreurs des valeurs de potentiel électrique restent dans une fourchette de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}$ , et la température finale est fixée à  $10^{-3}$ . La température initiale est mise à 1, afin de permettre un échantillonnage important des modèles dans l'espace des solutions *a priori*.

### 3.3.2. Résultats d'inversion.

Le processus d'inversion commence par un modèle  $4 \times 2$  blocs, soit 8 paramètres. Un des points du simplexe (un modèle à 8 paramètres) est initialisé à partir de la pseudo-section obtenue par le dispositif pôle-dipôle. La section finale de la première étape permet d'obtenir une structure géologique grossière (fig. (3.7a)) en assez bon accord avec nos *a priori* géologiques (une faille séparant des schistes et des sédiments).

L'étude de sensibilité n'a pas permis d'obtenir une information pertinente concernant la localisation des blocs qui pourraient être subdivisés. Ceci peut s'expliquer par un échantillonnage insuffisant de la zone d'étude rendant peu détectable l'influence de certains blocs sur le jeu de données. Le bruit contenu dans les données peut également expliquer le peu d'informations contenues dans l'analyse de sensibilité. Effectivement si l'influence d'un bloc sur certaines données sont du même ordre de grandeur que le bruit, il est alors très difficile de détecter cette influence. Afin de palier à ce manque d'informations nous avons alors décidé de réaliser un rééchantillonnage complet du modèle à l'étape suivante. Ainsi tous les blocs du modèle sont divisés, fournissant un nouveau modèle à 32 paramètres ( $8 \times 4$  blocs). Le résultat final de cette phase d'inversion est montré sur la figure (3.7b). Ce modèle de résistivité permet d'obtenir des informations plus détaillées sur les structures géologiques du terrain, notamment dans la partie centrale, près de la localisation de la faille.

Lors du rééchantillonnage du modèle utilisé pour la dernière phase de l'inversion, seuls les blocs de la partie supérieure du modèle ont été divisés. Ceci pour obtenir une meilleure résolution proche de la surface. Pour les mêmes raisons que précédemment l'analyse de sensibilité n'a pas permis d'obtenir d'information pertinente. Le modèle résultant comporte alors 80 paramètres. La structure de la partie inférieure du modèle n'est donc pas modifiée. La figure (3.7c) montre la section finale obtenue. Bien que la structure inférieure n'ait pas été modifiée (pas de division de blocs), on remarque qu'elle a subi des changements de conductivité. Ceci indique qu'après un rééchantillonnage, l'inversion doit être effectuée sur la totalité de la distribution de résistivité, afin de pouvoir "*mettre à jour*" les blocs non-modifiés vis-à-vis des blocs rééchantillonnés. Cette inter-dépendance des blocs est une illustration de la non-linéarité du problème inverse.

Un rééchantillonnage supplémentaire a été également effectué. Les blocs de la partie supérieure du modèle ont alors été à nouveau subdivisés. Cependant le modèle inverse de distribution de conductivité ne montrait aucune amélioration sensible de la résolution de la distribution de conductivité. Il est probable que l'échantillonnage des données ne permet pas d'obtenir une image de meilleure résolution que celle obtenue avec le modèle à 80 paramètres.

Les résultats d'inversion montrent clairement une structure géologique à deux compartiments avec une région conductrice à l'Est et une région résistante à l'Ouest du profil. Bien qu'en accord avec les connaissances que nous avons du site, notre inversion décale vers l'Ouest de la faille la limite entre les zones conductrices et résistantes (cf. fig. (3.7c)). La zone faillée semble pourtant bien localisée en profondeur, indiquant ainsi que les schistes situés à proximité de la faille sont plus conducteurs que ceux situés à l'extrémité du profil. En fait, ceci est en accord avec des sondages réalisés en 1958 et situés à 400 mètres au Sud



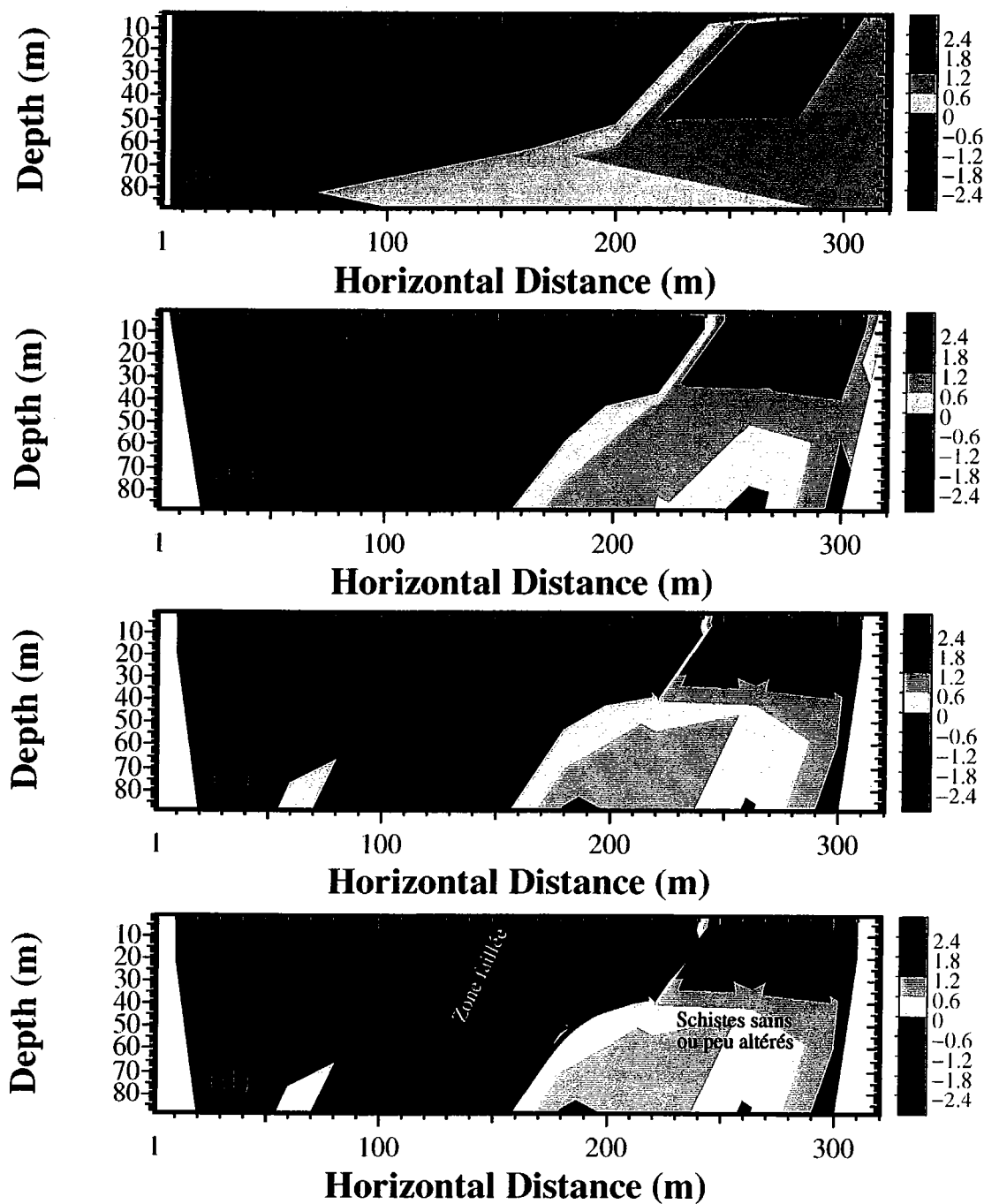


FIG. 3.7. – Modèles de résistivité obtenus lors de l'inversion des données de Pont-Péan. a) Section finale obtenue sur la grille la plus grossière : 4×2 blocs. b) Section finale obtenue sur une grille plus fine 8×4 correspondant à une division de tous les blocs de la grille précédente. c) Section finale obtenue sur une grille partiellement rééchantillonnée et possédant 80 blocs. d) Section (c) avec une interprétation géologique. A l'Est, un remplissage sédimentaire, à l'Ouest deux niveaux de schistes (très altérés et sains ou peu altérés), au centre une zone fortement faillee permettant une importante circulation d'eau.

du profil (cf. fig. (3.1)). Effectivement une recherche bibliographique réalisée après avoir effectué l'inversion nous a permis de constater que nos résultats sont en accord avec les sondages effectués à quelques centaines de mètres de notre terrain d'expérience.

Le premier sondage, effectué à 50 mètres à l'Ouest de la faille, indique une épaisseur de 55 mètres de schistes très altérés, tandis que le second, situé à 150 mètres à l'Ouest de la faille, donne une couche altérée réduite à 25 mètres. Ceci met en évidence une couche assez importante de schistes très altérés à proximité de la faille. La figure (3.1d) montre le modèle final obtenu par l'inversion multi-échelle avec l'interprétation géologique associée. Les diverses données historiques des mines de Pont-Péan indiquent que le filon doléritique est fortement fracturé avec d'importantes circulation d'eau. On peut parfaitement supposer que le filon constitue un *puits* de drainage des eaux superficielles occasionnant alors une forte altération des schistes au contact du filon.

## 3.4. Potentiel spontané.

### 3.4.1. Introduction.

Les mesures de potentiel spontané permettent de mettre en évidence les sources naturelles de courant pouvant être induites par des écoulements de fluides dans le sous-sol ou par des phénomènes géothermaux et électro-chimiques ([Fitterman and Corwin, 1982]; [Corwin, 1990]; [Zhdanov and Keller, 1994]).

Au plan mathématique, les sources de courant et le potentiel électrique sont reliés *via* l'équation de Poisson déjà vue au début de cette thèse. Le problème direct utilisé pour l'inversion électrique peut être immédiatement mis en oeuvre pour calculer le potentiel spontané causé par une distribution de sources de courant.

Le problème inverse est différent de celui de la tomographie électrique et consiste à trouver les sources de courant, la distribution de conductivité  $\sigma(x, y, z)$  étant supposée connue. Dans ce contexte, le problème inverse en tomographie électrique apparaît comme complémentaire puisqu'il peut fournir la distribution de conductivité  $\sigma(x, y, z)$ .

Les mesures de potentiel spontané ont été réalisées à l'aide d'électrodes impolarisables placées dans des trous remplis d'argile salée afin d'obtenir un bon couplage. Pour éviter un tassage du sol à proximité des électrodes, pouvant donner lieu à une polarisation induite très locale, les trous ont été réalisés avec un plantoir à bulbes. Les mesures de potentiel spontané n'ont pas concerné la totalité des profils de résistivité électrique et sont limitées aux 200 premiers mètres du profil de résistivité. La faille est cependant correctement échantillonnée.

Le filon doléritique est certainement trop profond (environ 80 mètres) pour que les mesures de potentiel spontané que nous avons réalisées permettent d'y localiser des sources; cependant les circulations d'eau sur le plan de faille, ou dans la zone fracturée, peuvent être suffisamment importantes pour fournir un signal. De récentes études ont permis d'aboutir à un formalisme, basé sur l'analyse en ondelettes continue, permettant une analyse rapide de données issues de mesures de champs de potentiel ([Moreau et al., 1997]; [Moreau et al., 1999]). Nous avons appliqué cette méthode à l'analyse de données de poten-

tiel spontané. Les résultats de l'application de cette méthode de traitement sont présentés sous la forme d'un article dans la partie suivante.

### 3.4.2. Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform : Application to self-potential profiles.

Article soumis à *Geophysical Research Letters*.

**Résumé :** La transformée en ondelettes continue peut être utilisée pour détecter et caractériser des singularités présentes dans un signal. Lorsque la transformée en ondelettes continue est adaptée à la théorie des champs de potentiels, l'analyse en ondelettes de données de potentiel (e.g. gravimétrique, magnétique, etc.) permet d'identifier, de localiser et de caractériser la singularité principale (i.e. mono-pôle, dipôle, etc.) provoquant les anomalies observées. Dans cet article, la méthode est appliquée à des données obtenues lors d'un profil de potentiel spontané perpendiculaire à une zone de faille peu profonde. Ainsi, à travers des exemples synthétiques, nous illustrons l'intérêt de la méthode pour une analyse rapide des données et fournissant des contraintes *a priori* pour des procédures d'inversion plus sophistiquées.

# Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform : Application to self-potential profiles

Dominique Gibert and Marc Pessel

Géosciences Rennes - CNRS/INSU, Université Rennes 1, France

Submitted to *Geophysical Research Letters*, July 2000.

**Abstract.** The continuous wavelet transform can be used to detect and characterize singularities present in a signal. When adapted to potential field theory, the wavelet analysis of potential data (e.g. gravity, magnetic, etc.) enables to identify, localize and characterize the main singular (i.e. mono-pole, dipole, etc.) sources causing the observed anomalies. In this paper the method is applied to a self-potential profile crossing a shallow fault zone. This, together with synthetic examples, illustrate the interest of the method to quickly analyze data and furnish a priori constraints for a more sophisticated inversion procedure.

## Introduction

Self-potential data carry unique information concerning fluid flows underground, geothermal and electro-chemical phenomena [Corwin, 1990, Zhdanov and Keller, 1994]. Despite this kind of data is acquired since several decades, only a few studies concern their inversion [Fitterman and Corwin, 1982], and most studies use a forward approach and numerical modeling [Fitterman, 1978, 1979, 1983; Sill, 1983; Yasukawa et al., 1993; Wurmstich and Morgan, 1994; Michel and Zlotnicki, 1998; Adler et al., 1999; Jouniaux et al., 1999]. In the same spirit, recent studies concerning hydrological applications fit the data through hydro-dynamical models which ensure the physical coherence of the current sources responsible for the observed self potential [Ishido and Pritchett, 1999]. Although very promising, this approach remains cumbersome and it might be useful to dispose of a less-specialized (i.e. not assuming an hydrological origin for the sources) method to perform a rapid analysis of the data in order to obtain general informations (e.g. number of sources, depth range, multipolar nature, etc.) concerning the sources. In recent studies, we presented a theoretical framework, based on the continuous wavelet transform, which allows a rapid analysis of potential field data [Moreau et al. 1997, 1999]. In the present study, we show how this method may be used with self-potential data by applying it to synthetic examples and to actual data acquired across a shallow fault zone.

## Main Theoretical Background

The starting equation is the first-order (Born approximation) coupling equation between primary and secondary induced flows [Sill, 1983],

$$\vec{J}_{total} = -\eta \vec{Q} - \sigma \vec{\nabla} \phi, \quad (3.4)$$

where  $\vec{Q}$  is the primary flow (fluid flow, heat flux, etc.),  $\eta$  is the cross-coupling coefficient,  $\sigma$  is the electrical conductivity, and  $\phi$  is the electrical potential. The electrical current  $\vec{J}_{total}$  is the sum of the advective current,  $\vec{J}_{advec} = -\eta \vec{Q}$  created by the primary flow, and of the conductive current  $\vec{J}_{conduc} = -\sigma \vec{\nabla} \phi$  resulting from Ohm's law. If no external current sources exist and the stationary regime approximation is valid, the total current flow is divergence-less,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{total} = 0$ , and equation (3.4) gives :

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \cdot (-\eta \vec{Q}). \quad (3.5)$$

For constant electrical conductivity, equation (3.5) may be further simplified,

$$\nabla^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot (-\beta \vec{Q}), \quad (3.6)$$

where  $\beta = \eta/\sigma$  is the voltage coupling coefficient. The source term of the Poisson equation (3.6) may be splitted as

$$\vec{\nabla} \cdot (-\beta \vec{Q}) = -\vec{\nabla} \beta \cdot \vec{Q} - \beta \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}, \quad (3.7)$$

where the first right-hand term represents sources located where the primary flow crosses (almost perpendicularly) spatial variations of the coupling coefficient, and the second right-hand term represents external sources of primary flow (e.g. well pumping, rainfall). The second mathematical item necessary in the present study is the continuous wavelet transform of a function  $\phi_0$  which may be written as a convolution product,

$$\mathcal{W}[g, \phi_0](b, a) \equiv (\mathcal{D}_a g * \phi_0)(b), \quad (3.8)$$

where  $g$  is the analyzing wavelet, and  $\mathcal{D}_a$  is the dilation operator acting as

$$\mathcal{D}_a g(x) \equiv \frac{1}{a} g\left(\frac{x}{a}\right), \quad (3.9)$$

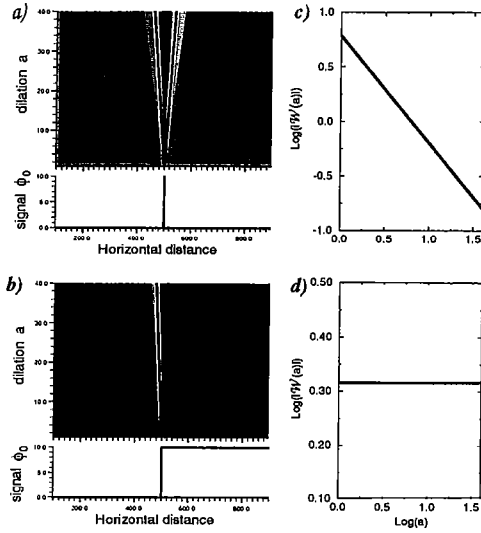
where the dilation  $a > 0$ . The analyzing wavelet is essentially an oscillating localized function (i.e. with a compact or quasi-compact support) with a vanishing integral. The continuous wavelet transform possesses many nice mathematical properties (see, for instance, Holschneider [1995] for a general introduction), and in the present study the useful properties concern the remarkable structure of the wavelet transform of homogeneous functions  $\phi_0$  verifying

$$\phi_0(\lambda x) = \lambda^\alpha \phi_0(x), \quad (3.10)$$

where  $\alpha$  is the homogeneity degree. For such an homogeneous function, equation (3.8) gives :

$$\mathcal{W}[g, \phi_0](\lambda b, \lambda a) = \lambda^\alpha \mathcal{W}[g, \phi_0](b, a), \quad (3.11)$$

which indicates that the whole wavelet transform of an homogeneous function may be extrapolated from the wavelet transform at a given single dilation.

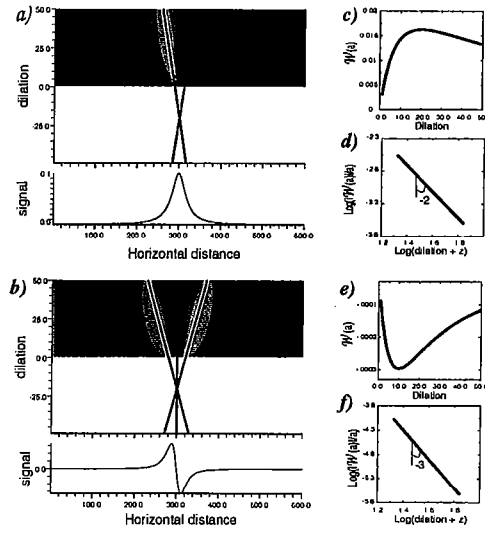


**Figure 1 :** Continuous wavelet transforms of a Dirac (a) and an Heaviside (b) distribution of homogeneity  $\alpha = -1$  and  $\alpha = 0$  respectively. Both wavelet transforms display a cone-like geometry and the magnitude along any straight line crossing the cone apex varies according to a power law with exponent  $\alpha$  (c and d).

The geometrical translation of this property (Figure 1a,b) is that the wavelet transform of an homogeneous function possesses a cone-like structure which converges at the homogeneity center of the analyzed function. Also, the variation of the magnitude of the wavelet transform along any straight line crossing the homogeneity center is a power law of exponent  $\alpha$  with respect to the dilation  $a$  (Figure 1c,d) [Alexandrescu et al., 1995, 1996 ; Holschneider, 1995].

The continuation property (3.11) of the wavelet transform has been generalized, and a particular class of analyzing wavelets has been found such that the wavelet transform of a potential field satisfying the Poisson equation (3.6) may be used to detect, localize and characterize homogeneous singularities eventually present in the causative source distribution [Moreau et al., 1997, 1999 ; Hornby et al., 1999 ; Sailhac et al., 2000]. The only difference with respect to the analysis shown in Figure 1 is that the apex of the cone-like structure of the wavelet transform is no more located on the  $a = 0$  line, but now at  $a = -z_s$  below the wavelet half-plane,  $z_s$  being the depth of the causative source (Figure 2a,b).

Applying a proper scaling of the dilations  $a$  with respect to  $z_s$ , the power-law variation of the magnitude of the wavelet transform is restituted and the homogeneity degree  $\alpha$  of the source can be determined (Figure 2d,e). Hence, the wavelet transform allows to retrieve both the location and the nature (e.g. bipolar) of a singular source from its potential field anomaly (gravity, magnetic, self-potential). The reader is referred to Moreau et al. [1997, 1999] for details concerning the method. This mathematical framework constitutes a means to quickly analyze potential field data in order to quasi-automatically represent the observed field in terms of a limited number of simple sources. This is not an inversion method but, instead, a pre-processing which may provide prior information useful for a more sophisticated inversion.



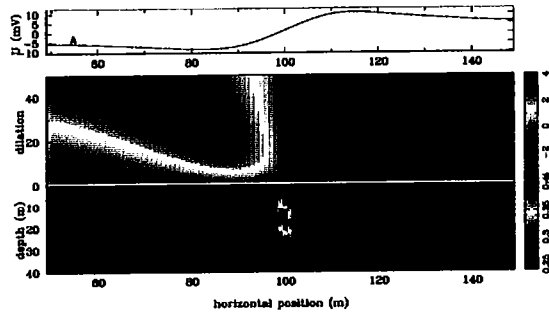
**Figure 2 :** Continuous wavelet transforms the potential fields caused by a bipolar (a) and a quadrupolar (b) source of homogeneity  $\alpha = -2$  and  $\alpha = -3$  respectively. The apex of the cone-like geometry is located at a negative dilation corresponding to the depth  $z_s$  of the sources. The magnitude along any straight line crossing the cone apex now varies in a complicated manner (c and e) but the power-law behavior is restituted when the dilation axis is properly rescaled with respect to  $z_s$  (d and f).

### Synthetic examples

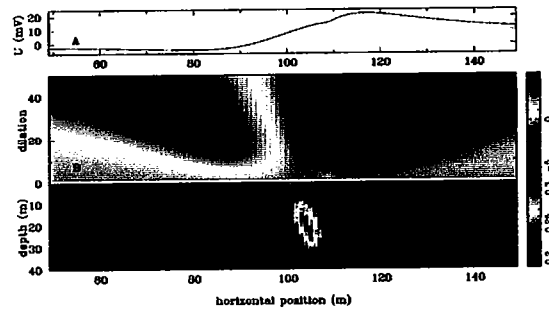
We now illustrate the method with two synthetic examples. The first one corresponds to a model of constant conductivity  $\sigma = 10^{-2} S/m$ , and with two current source points such that  $(x_s = 90, z_s = 14, \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{advec} = -0.4)$  and  $(x_s = 110, z_s = 12, \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{advec} = +0.4)$ . The corresponding potential profile is shown in Figure 3a. The wavelet transform of this profile possesses a clear cone-like structure (Figure 3b), and Figure 3c represents the area where the apex of the wavelet cone is more likely to be located. This mapping from the wavelet half-space to the  $(x_s, z_s)$  half-space has been done by evaluating the cone-like geometry of the wavelet transform with respect to every point in a rectangular domain of the  $(x_s, z_s)$  domain. In practice, the cone-like coherency is quantified by rescaling the wavelet transform according to the tested apex and by computing the slope of the wavelet transform modulus along a set of straight lines emerging from the tested apex. A normalized histogram  $h_i$  with  $N$  bins of the slopes  $p_j$  is computed and its  $\delta$ -like behavior is quantified by the following index based on Shannon entropy [Tass et al., 1998]

$$\rho(x_s, z_s) \equiv \frac{\ln N + \sum_{i=1}^N h_i \ln h_i}{\ln N}. \quad (3.12)$$

The index  $\rho$  varies from 0 for a uniform histogram to 1 for a  $\delta$ -like histogram. The best location is at  $x_s = 100$  m and  $z_s = 15$  m with an homogeneity degree  $\alpha = -2.05$  which accurately indicates a bipolar source. The depth to the source is slightly overestimated because the two current source points are actually separated by a finite distance  $\delta x_s = 20$  m.

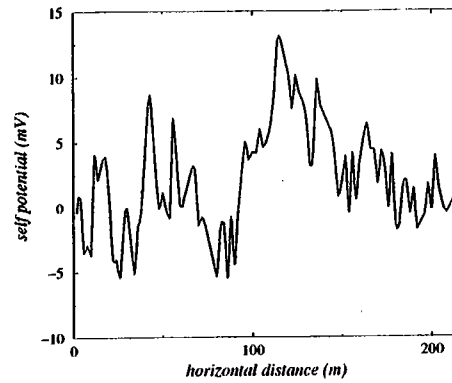


**Figure 3 :** Synthetic model with a constant conductivity  $\sigma = 10^{-2} S/m$ . A) : potential created by two current source points ( $x_s = 90, z_s = 14, I = -0.4$ ) and ( $x_s = 110, z_s = 12, I = +0.4$ ). B) : Continuous wavelet transforms of the potential profile. C) : Map of the  $\rho$  measure showing the area where the cone-like structure of the wavelet transform is coherent.

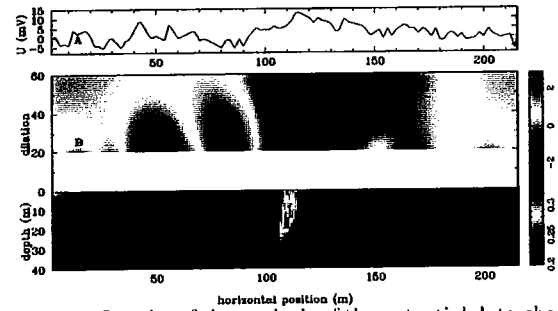


**Figure 4 :** Same as Figure 3 but for  $\sigma = 10^{-2} S/m$  left of  $x = 108$  m and  $\sigma = 2.10^{-3} S/m$  on the right. A) : potential created by two current source points ( $x_s = 90, z_s = 14, I = -0.4$ ) and ( $x_s = 110, z_s = 12, I = +0.4$ ). B) : Continuous wavelet transforms of the potential profile. C) : Map of the  $\rho$  measure showing the area where the cone-like structure of the wavelet transform is coherent.

The second example is slightly more complicated with a conductivity structure corresponding to a faulted region with two blocks with differing conductivities and the same current sources as for the previous example. The fault plane is vertical and located at  $x = 108$  m. This model is expected to better agree with the Pont-Péan area whose data are analyzed in the next section, and the results are shown in Figure 4. As expected, the location of the current sources is not so accurate as for the previous example since the constant-conductivity assumption underlying equation (3.6) is not valid. This results in a horizontal location  $x_s = 104$  m of the equivalent bipolar source biased toward the less conductive block, and  $z_s = 18$  m. The horizontal bias may be qualitatively understood by the fact that the lower the conductivity, the larger the apparent strength of a given current source, but an exact assessment for the bias should also consider the fact that the present model also involves source images with respect to the fault plane. Despite these perturbations, the homogeneity degree is found almost unchanged,  $\alpha = -2.07$ , still indicating a global bipolar current source.



**Figure 5 :** Self potential (measured with respect to the first point of the profile) along a profile perpendicular to the Pont-Péan fault zone. The fault is approximately located at the  $x = 100$  m horizontal position and is inclined toward the left (eastward) with an angle of about  $80^\circ$ .



**Figure 6 :** Results of the analysis of the potential data shown in Figure 5. B) : Continuous wavelet transform of the data (a). The small-dilation range  $a < 20$  has been removed because of a too bad signal-to-noise ratio. C) : Map of the  $\rho$  measure showing the area where the cone-like structure of the wavelet transform is coherent.

#### Analysis of the Pont-Péan Data

The Pont-Péan fault-zone is a mineralized diorite dike which has been industrially exploited during the 18th and 19th centuries until a massive flood invaded the underground galleries in April 1904. The area has been extensively studied and the geological structure is well-known, with a linear 4 km-long fault which enables a very good 2D approximation. Although located in the Pont-Péan village 10 km south of Rennes (Britanny), the area is not industrialized and the geophysical measurements are of good quality (i.e. good signal-to-noise ratio and repeatability of measurements). The electrical potential measured perpendicularly to the fault is shown in Figure 5 and display a bipolar anomaly located in the vicinity of the fault zone.

Figure 6 shows the results of the analysis of the data of Figure 5. The dilation range  $a < 20$  of the wavelet transform was not considered because of a too low signal-to-noise ratio (see Alexandrescu *et al.* [1995] for details concerning the wavelet transform of noisy signals). The cone-like structure of the wavelet transform is conspicuous (Figure 6b), and

the location area of the source obtained from the  $\rho$  map (Figure 6c) is rather limited in extend with a clearly marked maximum centered at  $x_s = 107$  m,  $z_s = 15$  m with an homogeneity degree  $\alpha = -2.25$  very near the one of a pure bipolar source. The shallow depth to the source indicates that the self-potential signal is more likely produced by shallow fluid flow in the fault zone rather than by electro-chemical phenomena arising in the mineralized dike whose top has been found much deeper (i.e.  $> 80$  m).

### Conclusion

In this letter, we show how the continuous wavelet transform may be used to analyze self-potential data. The theoretical framework established by Moreau *et al.* [1997, 1999] may formally be applied only if the electrical conductivity is a constant. However, the synthetic example corresponding to the inhomogeneous conductivity model (Figure ??) shows that the theory may still be applied with an acceptable accuracy level. The wavelet analysis provides both an estimate of the location and of the nature (dipole, etc.) of the current source responsible of a given self-potential signal. This may constitute a prior information useful to initiate a more sophisticated inversion of the data at hand.

**Acknowledgments :** We thank Georges Ruelloux and Aude Chambodut for their kind assistance during the field operations, and the members of the Galène association (<http://pont-pean.le-village.com/galene/>) for providing us with both historical and geological informations concerning the Pont-Péan mining industry.

### Bibliographie

- Adler, P.M., J.-L. Le Mouél, and J. Zlotnicki, Electrokinetic and magnetic fields generated by flow through a fractured zone : A sensitivity study for La Fournaise volcano, *Geophys. Res. Lett.*, 26, 795-798, 1999.
- Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J.-L. Le Mouél, and G. Saracco, Detection of geomagnetic jerks using wavelet analysis, *J. Geophys. Res.*, 100, 12557-12572, 1995.
- Alexandrescu, M., D. Gibert, G. Hulot, J.-L. Le Mouél, and G. Saracco, Worldwide wavelet analysis of geomagnetic jerks, *J. Geophys. Res.*, 101, 21975-21994, 1996.
- Corwin, R.F., The self-potential method for environmental and engineering applications, in *Geotechnical and Environmental Geophysics*, 127-146, S.H. Ward ed., SEG, 1990.
- Fitterman, D.V., Electrokinetic and magnetic anomalies associated with dilatant regions in a layered Earth, *J. Geophys. Res.*, 83, 5923-5928, 1978.
- Fitterman, D.V., Calculations of self-potential anomalies near vertical contacts, *Geophysics*, 44, 195-205, 1979.
- Fitterman, D.V., Modeling of self-potential anomalies near vertical dikes, *Geophysics*, 48, 171-180, 1983.
- Fitterman, D.V., and R.F. Corwin, Inversion of self-potential data from the Cerro Prieto geothermal field, Mexico, *Geophysics*, 47, 938-945, 1982.
- Holschneider, M., *Wavelets : An Analysis Tool*, 423 pp., Clarendon, Oxford, England, 1995.
- Hornby, P., F. Boschetti, and F.G. Horowitz, Analysis of potential field data in the wavelet domain, *Geophys. J. Int.*, 137, 175-196, 1999.
- Ishido, T., and J.W. Pritchett, Numerical simulation of electrokinetic potentials associated with subsurface fluid flow, *J. Geophys. Res.*, 104, 15247-15259, 1999.
- Jouniaux, L., J.-P. Pozzi, J. Berthier, and P. Massé, Detection of fluid flow variations at the Nankai Trough by electric and magnetic measurements in boreholes or at the seafloor, *J. Geophys. Res.*, 104, 29293-29309, 1999.
- Michel, S., and J. Zlotnicki, Self-potential and magnetic surveying of La Fournaise volcano (Réunion island) : Correlation with faulting, fluid circulation, and eruption, *J. Geophys. Res.*, 103, 17845-17857, 1998.
- Moreau, F., D. Gibert, M. Holschneider, and G. Saracco, Wavelet analysis of potential fields, *Inverse Probl.*, 13, 165-178, 1997.
- Moreau, F., D. Gibert, M. Holschneider, and G. Saracco, Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform : Basic theory, *J. Geophys. Res.*, 104, 5003-5013, 1999.
- Sailhac, P., A. Galdeano, D. Gibert, F. Moreau, and C. Delor, Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform : Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana, *J. Geophys. Res.*, 105, in the press, 2000.
- Sill, W.R., Self-potential modeling from primary flows, *Geophysics*, 48, 76-86, 1983.
- Tass, P., M.G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, and H.-J. Freund, Detection of non phase locking from noisy data : Application to magnetoencephalography, *Phys. Rev. Lett.*, 81, 3291-3294, 1998.
- Wurmstich, B., and F.D. Morgan, Modeling of streaming potential responses caused by oil well pumping, *Geophysics*, 59, 46-56, 1994.
- Yasukawa, K., G.S. Bodvarsson, and M.J. Wilt, A coupled self-potential and mass-heat flow code for geothermal applications, *Trans. Geotherm. Resour. Counc.*, 17, 203-207, 1993.
- Zhdanov, M.S., and G.V. Keller, *The Geoelectrical Methods in Geophysical Exploration*, Elsevier, New York, 1994.

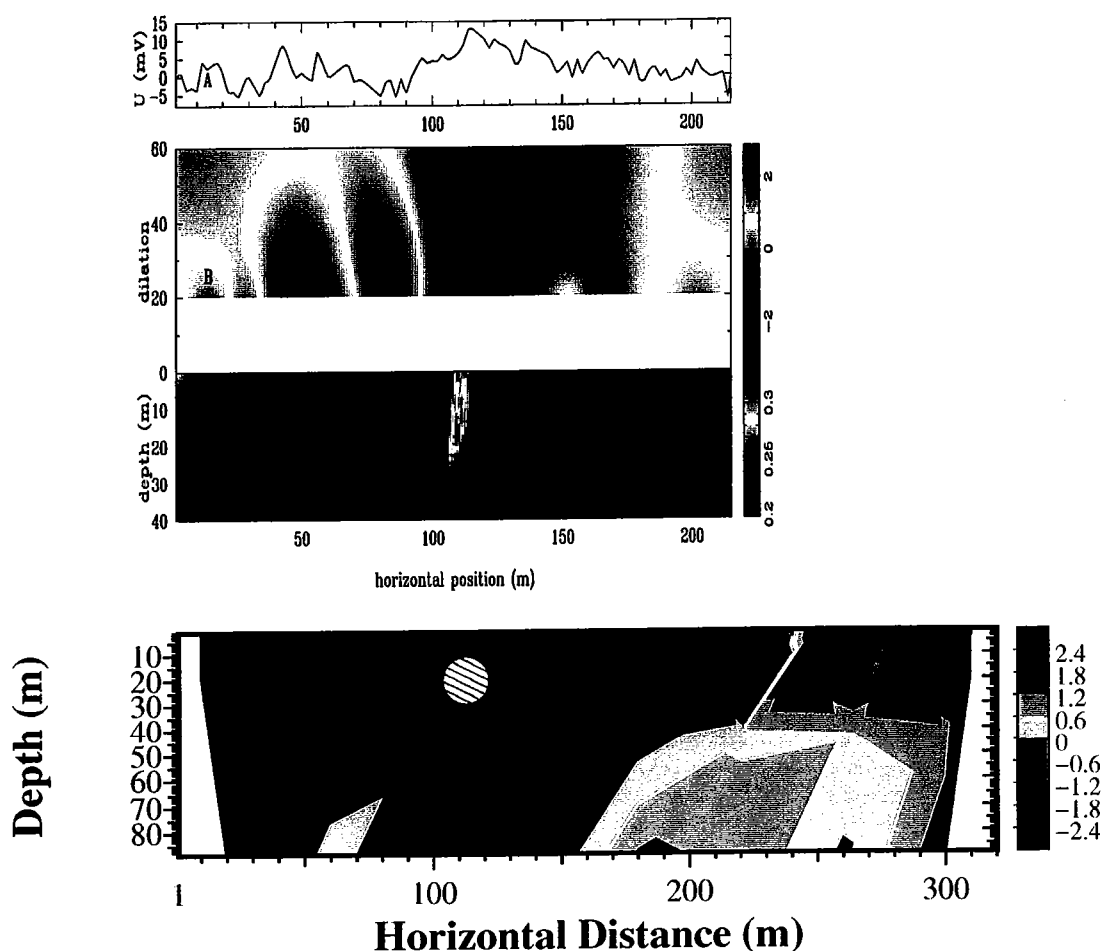


FIG. 3.8. – Résultat final d'inversion de résistivité et analyse en ondelettes continue de données de potentiel spontané. Les échelles horizontales sont équivalentes, ce qui permet une comparaison directe de la localisation de la faille avec les deux méthodes.

### 3.4.3. Comparaison Résistivité - Potentiel spontané.

La figure (3.8) présente les résultats d'inversion de données de potentiel électrique et l'analyse en ondelettes continue sur des données de potentiel spontané. Les deux images résultantes ont été mises à la même échelle horizontale, afin de comparer les informations fournies par les deux analyses de données. L'analyse en ondelettes continue indique une source localisée à  $x_s = 107$  m en surface et à une profondeur de  $x_z = 15$  m. La faible profondeur de la source indique que le signal de polarisation induite est certainement liée à une circulation d'eau dans la zone faillée, plutôt qu'à un phénomène électro-chimique induit par le filon minéralisé.

Il apparaît que la localisation des sources par l'analyse en ondelettes est en léger décalage par rapport à la distribution de conductivité fournie par l'inversion multi-échelle. Cependant l'analyse en ondelettes continue est relativement grossière et donne une localisation des sources de courant à l'aplomb de la faille en profondeur. Ainsi, la corrélation



entre le traitement des données de potentiel spontané et l'inversion de la distribution de conductivité est cohérente.

### 3.5. Discussion.

La figure (3.9) présente les résultats d'inversion de deux autres méthodes d'interprétation de données de résistivité électrique relativement employées : inversion de Zhody ([Zhody, 1989]) et le logiciel Res2Dinv ([Loke and Barker, 1995]; [Loke and Dahlin, 1998]). Deux images sont fournies pour chaque méthode correspondant à chaque dispositif utilisé (Wenner et pôle-dipôle). Les deux premières images montrent le résultat de l'inversion de Zhody. En les comparant avec les pseudo-sections de la figure (3.5), on s'aperçoit que l'inversion n'a quasiment pas modifiée la distribution de conductivité. Cette interprétation des données est 1-D et consiste à ajuster les valeurs de résistivité apparente *via* une approximation linéaire. Il apparaît clairement que l'hypothèse 1-D et la linéarisation du problème ne permettent pas d'obtenir une image correcte de la distribution de résistivité.

Les deux images suivantes de distribution de résistivité (celles au centre de la figure (3.9)) sont le résultat d'une inversion 2-D. L'inversion est basée sur une méthode d'optimisation des moindres carrés ([Loke and Barker, 1995]). Les temps de calcul sont très courts. Cependant, il semble délicat de les considérer comme corrects au vu des connaissances géologiques que nous possédons sur le site étudié. Notamment vis-à-vis de la zone résistante au centre du profil qui apparaît sur les deux distributions de conductivité fournies par cette inversion.

Ces résultats mettent en évidence l'intérêt d'une approche pleinement non-linéaire, n'impliquant pas une régularisation du problème qui ne permet pas d'expliquer la totalité des données du problème. Ils montrent également l'importance d'une recherche la plus exhaustive possible dans l'espace des solutions afin de permettre la génération de modèles de distribution de conductivité et de ne pas rester "*bloquer*" dans un minimum local (comme par ex. la distribution de conductivité fournie par les pseudo-sections).

### 3.6. Conclusion.

Cette première étude de terrain a permis de valider globalement notre méthode d'inversion. La distribution de résistivité finale fournie par l'inversion est en bon accord avec les connaissances géologiques que nous possédons sur le secteur étudié. La première phase a permis d'aboutir à un modèle de résistivité relativement grossier, dont la structure donnait l'idée générale de la structure finale. Ce point est relativement important puisqu'il démontre l'intérêt d'obtenir des images "*grossières*" du sous-sol fournissant une information suffisamment pertinente pour être utile aux phases suivantes. Il est évident que ce type de résultat n'est valable que si la structure de la zone étudiée possède une géométrie pouvant être représentative à l'échelle de l'inversion (i.e. du modèle de résistivité courant).

Les phases suivantes du processus d'inversion, en l'occurrence au nombre de 2, per-

mettent alors d'améliorer la résolution de certains secteurs : la zone faillée et la surface. Il est à noter que nous avons d'abord été relativement surpris de constater le décalage de la limite zone conductrice - zone résistance par rapport à ce que les données géologiques et les pseudo-sections nous permettaient d'attendre. Ce décalage nous a conduit à douter de nos résultats d'inversion et à retester l'ensemble des logiciels et des données. D'autres inversions réalisées, en changeant certains paramètres (topologie de la grille, loi de décroissance de la température, etc...), ont confirmé ce décalage. Finalement, de nouvelles recherches bibliographiques nous ont fourni des informations provenant de sondages en total accord (qualitativement et quantitativement) avec nos résultats d'inversion et indiquant la présence de schistes très altérés à proximité de la faille.

Ce comportement de la méthode inverse permet donc de valider la paramétrisation multi-échelle adaptative qui, malgré l'accroissement de la non-linéarité du problème inverse, semble en parfaite adéquation avec le recuit simulé.

Les temps de calcul restent relativement élevés, mais avec un ordre de grandeur raisonnable, environ 20 heures sur un ordinateur de bureau (type PC). Cependant, l'emploi d'une méthode stochastique impose souvent des temps de calcul nettement supérieurs par rapport aux méthodes d'optimisation type Gauss-Newton.

La dernière remarque concerne les résultats de la localisation de source de courant *via* une analyse en ondelettes continue. Les études du sous-sol proche sont toujours extrêmement délicates à opérer : hétérogénéité, anisotropie, forte variabilité temporelle, etc ... Ainsi les légères différences observables entre l'analyse en ondelettes continue et la tomographie électrique peuvent être parfaitement justifiées. De plus, les sources de courant sont localisées à l'aplomb de la zone faillée mise en évidence par l'inversion multi-échelle, ainsi les deux méthodes convergent vers des résultats cohérents.

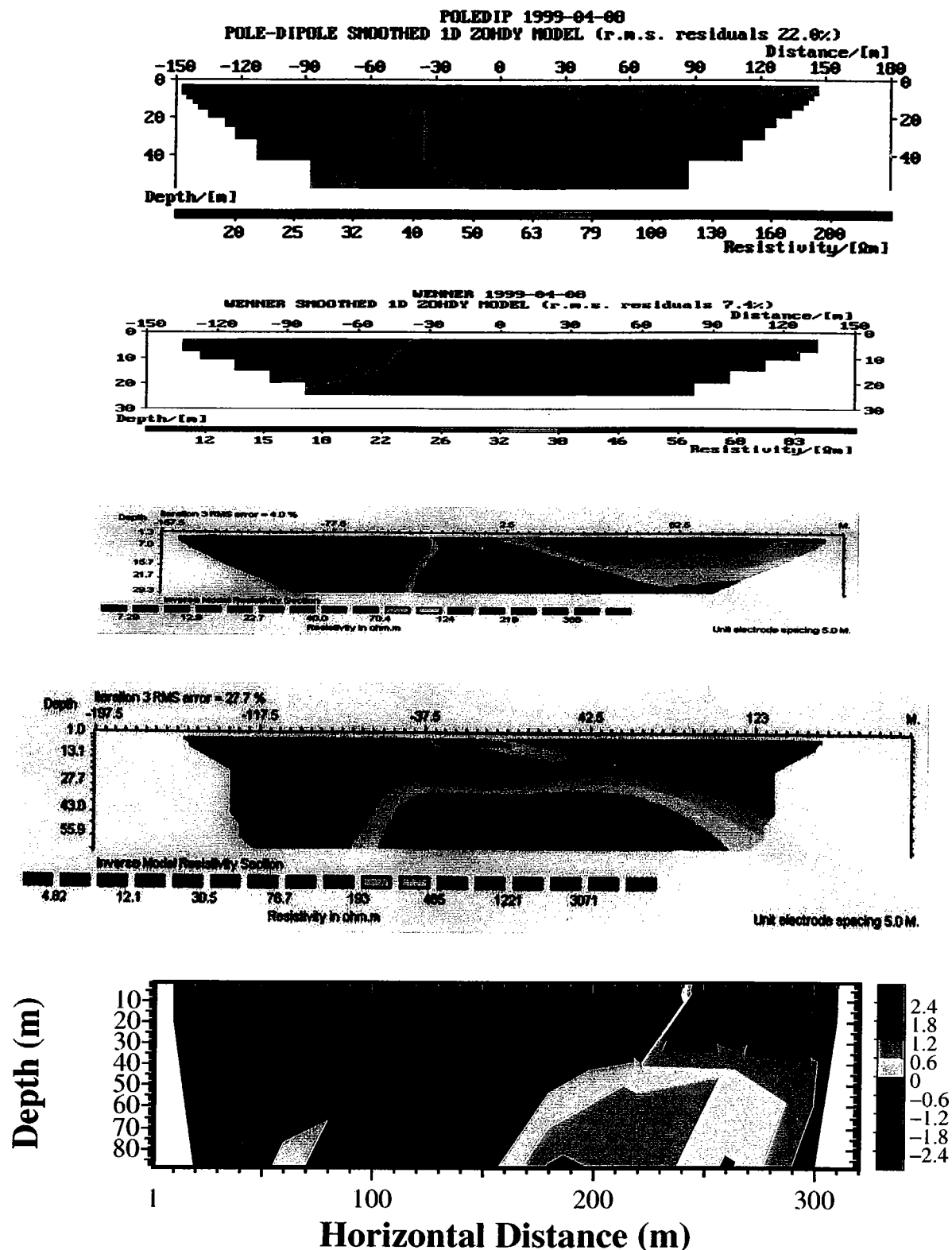


FIG. 3.9. – Comparaison de résultats d'inversion. Les deux images supérieures sont le résultat d'une inversion 1-D de Zhody. Les deux images du centre sont issues d'une inversion 2-D par le logiciel Res2Dinv basée sur un algorithme de Marquardt-Levenberg. L'image du bas est le résultat de notre inversion multi-échelle.



## Conclusion & Perspectives



## Conclusion & Perspectives

Une large partie de cette thèse est constituée d'un développement méthodologique concernant l'interprétation de données électriques. Ceci a été développé dans la première partie, en deux chapitres : le problème direct et le problème inverse. Le problème direct est résolu numériquement *via* une méthode multigrille qui permet de résoudre rapidement de larges systèmes linéaires. L'efficacité de cette méthode a été démontrée puisque le gain en termes de temps de calcul est d'environ un ordre de grandeur par rapport aux méthodes directes et de relaxation. Les méthodes multigrilles sont particulièrement bien adaptées à la résolution de l'équation de Poisson, puisque celle-ci peut s'exprimer sous la forme d'une somme d'un potentiel primaire et d'un potentiel secondaire. Le potentiel primaire, induit par l'injection de courant, peut être résolu à des échelles relativement grossières, tandis que le potentiel secondaire, relié à la distribution des charges, demande à être résolu à des échelles nettement plus fines. L'algorithme multigrille pratique intrinsèquement cette résolution multi-échelle de l'équation de Poisson.

Ce principe d'une résolution multi-échelle a été appliqué lors de la résolution du problème inverse par le biais d'une paramétrisation multi-échelle et adaptative. Effectivement, afin de ne pas geler la structure des modèles de distribution de conductivité, il était nécessaire de pouvoir faire évoluer la paramétrisation pendant le processus d'inversion afin d'aboutir à une paramétrisation optimale. Cependant, comme on l'a vu, ceci rend le problème fortement non-linéaire et donc seules des méthodes inverses pleinement non-linéaires comme le recuit simulé sont envisageables. Le couplage du recuit simulé et de la descente du simplexe permet d'obtenir une méthode inverse hybride, c'est-à-dire effectuant une recherche locale et globale dans l'espace des solutions. Ce type de méthode inverse est réellement très efficace et permet d'annihiler les lacunes de chaque méthode prise indépendamment. Les tests synthétiques ont permis de montrer l'intérêt d'une paramétrisation multi-échelle adaptative. Effectivement, lorsque cette paramétrisation devient optimale pour le modèle considéré, la décroissance de la fonction coût est relativement brutale, l'inversion converge alors rapidement vers le *meilleur* modèle.

L'interprétation de données électriques réelles a été réalisée sur un terrain relativement simple et surtout permettant de valider notre hypothèse d'un milieu possédant une direction invariante. De plus, des études précédentes nous permettaient d'avoir une bonne connaissance *a priori* de la géométrie des différentes structures. Les résultats d'inversion ont permis de conforter le choix d'une méthode inverse ne nécessitant pas d'informations *a priori* et dont l'exploration des modèles dans l'espace des solutions n'est pas excessivement restreint. La distribution de résistivité obtenue a été comparée avec les résultats d'une

analyse en ondelettes continue et des données de carottage. On a alors abouti à une bonne cohérence entre les différentes sources d'informations, permettant de valider la méthode inverse.

Bien que l'algorithme final de résolution du problème direct soit cohérent et permet le traitement de données réelles, quelques points n'ont pas été approfondis, notamment la gestion des conditions aux limites. En effet, le choix que nous avons effectué permet seulement de reporter le problème hors de la zone d'étude. Cependant, il est évident que ce choix entraîne une augmentation de la grille de modélisation et donc du temps de calcul. Ainsi, ce point est certainement celui qui devra être abordé en priorité afin d'améliorer la résolution du problème direct.

Dans le cas de zones relativement petites (quelques centaines de mètres), il est souvent possible de s'affranchir des effets topographiques, c'est pourquoi ces problèmes n'ont pas été abordés. Cependant, il est évident que certains terrains sont particulièrement sensibles à ces effets (par ex. les volcans). Plusieurs solutions peuvent être envisagées pour résoudre les problèmes topographiques. Dans le même ordre d'idée que la gestion des conditions aux limites, un agrandissement de la grille de modélisation dont les mailles dans l'air sont affectées d'une conductivité nulle permet de traiter simplement et rapidement (en termes d'implémentation dans l'algorithme) les effets topographiques. Des solutions plus sophistiquées peuvent également être implémentées, comme par exemple l'emploi d'un mailleur spécifique, permettant alors de générer une grille de modélisation particulièrement bien adaptée à la morphologie du site étudié. Ce choix implique une formulation en éléments finis des équations de Maxwell. Néanmoins, l'algorithme multigrille est relativement souple, et une telle modification n'impose pas une refonte totale de l'algorithme et augmenterait encore la modularité, en séparant maillage de la grille et résolution du système linéaire.

Une dernière amélioration à apporter à la résolution du problème direct est une formulation pleinement 3-D afin de pouvoir interpréter des données acquises lors d'études sur des terrains fortement hétérogènes où l'hypothèse d'une direction invariante ne pourrait être validée. Toutes ces améliorations doivent s'intégrer dans un algorithme multigrille qui est actuellement le seul type d'algorithme permettant la résolution de grands systèmes linéaires en des temps de calcul raisonnables.

Lors du développement de la méthode inverse divers aspects liés au choix de la paramétrisation ont été abordés ; cependant, certains peuvent être soit approfondis, soit réalisés différemment. Dans le cadre de la décomposition du modèle en blocs, qui peut se voir comme une décomposition en ondelettes de Haar, le choix d'une décomposition en ondelettes orthogonales lissées permettrait justement d'obtenir des modèles lissés. Ceci éliminerait certains artefacts dans la représentation des modèles de distribution de conductivité.

Le point qui demande le plus de développement est celui concernant la décision du rééchantillonnage du modèle. En effet, ceci a été abordé relativement succinctement, mais il est certain que les efforts doivent maintenant se diriger vers une analyse complète des différentes méthodes possibles pour résoudre ce problème. Une approche pourrait être d'analyser statistiquement les données afin de définir les différentes corrélations qui peuvent exister entre les données et les zones sensibles du modèle. L'idée est alors de définir une hiérarchie des données en fonction des différentes zones du modèle. L'objectif de ce dé-



## CONCLUSION & PERSPECTIVES.

---

veloppement est d'automatiser au maximum le rééchantillonnage du modèle, même s'il paraît utopique de remplacer intégralement une décision humaine qui permet l'utilisation d'informations *a priori* difficiles à formaliser mathématiquement et/ou informatiquement. Cependant les aspects spatio-temporels de la tomographie électrique pourraient alors être intégrés directement lors de l'interprétation des données afin d'aboutir à une focalisation de l'interprétation des données électriques sur les zones sensibles du terrain d'étude.

L'objectif de cette thèse était donc de mettre en oeuvre une méthode d'interprétation des données électriques en posant quelques jalons permettant d'envisager des approches beaucoup plus sophistiquées dans l'avenir. Dans l'optique d'étudier un milieu dont les propriétés physiques, et notamment la conductivité, évoluent avec le temps, il sera nécessaire de modifier la paramétrisation du modèle afin qu'elle soit optimale à chaque instant. Dans ce cadre précis une paramétrisation multi-échelle adaptative semble particulièrement bien adaptée. L'analyse permettant de guider le rééchantillonnage du modèle peut également servir à redéfinir le protocole d'acquisition de données. Effectivement, cette analyse devrait fournir des informations sur les corrélations entre les données et les secteurs *intéressants* du modèle, et il pourrait être judicieux donc de modifier le protocole d'acquisition afin d'obtenir des données en meilleur adéquation avec les variations observées. En fait, ceci se rapproche des études d'assimilation de données qui ont été développées en Océanographie et en Météorologie, c'est-à-dire que le processus d'inversion est synchrone de l'acquisition des données, les nouvelles données étant intégrées en permanence dans le processus d'inversion afin de faire évoluer le modèle.

Le développement des méthodes d'interprétation des données électriques est évidemment directement utilisable pour le génie civil et les exploitations minières. Cependant, il est certain que les études environnementales exploiteront de plus en plus les études géoélectriques, notamment si elles sont capables d'étudier des milieux évoluant très rapidement. L'imagerie médicale utilise depuis un certain temps la tomographie d'impédance électrique. Celle-ci n'est pas encore devenue un outil classique, mais les avancées dans les deux domaines sont extrêmement corrélées, notamment dans le développement méthodologique des algorithmes d'interprétation.



## Troisième partie .

### Annexes



Matériaux	Permittivité relative (perméabilité diélectrique) ( $\epsilon$ en farad/m)	Conductivité ( $\sigma$ en siemens/m)	Perméabilité relative ( $\mu$ en henri/m)
air	1	$10^{-6}$	1
Eau propre	90-70	$10^{-3}$ - $10^{-6}$	1
Eau de mer	77-60	5	1
Glace	4-3		1
Neige	1.2-1.5		1
Huile naturelle	2-3		1
Pétrole	2-2.2		1
Sel sec	5-6	$10^{-5}$ - $10^{-6}$	1
Roches volcaniques	4-17	$10^{-3}$ - $10^{-6}$	1-1.1
Quartzite	3-6	$10^{-2}$ - $10^{-6}$	1-1.2
Gneiss et Schistes	5-15	$10^{-2}$ - $10^{-6}$	1-1.2
Roches sédimentaires	4-10	$10^{-1}$ - $10^{-5}$	1-1.2
Sables	2-10	$10^{-2}$ - $10^{-5}$	1-1.5
Fer		$10^6$ - $10^7$	5-7
Cuivre		$10^3$	1
Béton	10-12		1
Charbon		$10^{-3}$	1
Tourbe	60-80	$10^{-2}$ - $10^{-3}$	1
Argiles	5-40	$10^{-3}$ - 1	1

TAB. .1. — Ordres de grandeurs des paramètres électromagnétiques pour divers matériaux. (Compilation de [Saintenoy, 1998])

## Multiscale Electrical Impedance Tomography

Marc Pessel and Dominique Gibert

Géosciences Rennes - CNRS/INSU, Université Rennes 1, France

D. Gibert, Géosciences Rennes, Université Rennes 1, Bât. 15 Campus de Beaulieu, 35042  
Rennes cedex, FRANCE. (e.mail gibert@univ-rennes1.fr)

M. Pessel, Géosciences Rennes, Université Rennes 1, Bât. 15 Campus de Beaulieu, 35042  
Rennes cedex, FRANCE. (e.mail pessel@univ-rennes1.fr)

Submitted to *Journal of Geophysical Research*, July 2000

**Résumé.** Le problème inverse non-linéaire en tomographie d'impédance électrique est résolu *via* une approche en recuit simulé couplé avec une paramétrisation multi-échelle du modèle de conductivité. L'inversion multi-échelle est réalisée séquentiellement en inversant progressivement des modèles de plus en plus compliqués et incorporant des détails de plus en plus fin. Chaque modèle rééchantillonné est précédé par une étape permettant la décision du rééchantillonnage, basée sur une analyse de sensibilité. L'utilisation d'un algorithme d'inversion non-linéaire est nécessaire afin de permettre à la solution de s'extraire d'éventuels minima locaux de la probabilité *a posteriori*. Le recuit simulé est particulièrement efficace pour résoudre ce type de problème. Un exemple synthétique illustre comment l'algorithme adapte le modèle vers une structure multi-échelle. Un exemple de terrain, dont les données ont été acquises par un dispositif pôle-dipôle, dans une région minière bien documentée conclue l'étude.

# Multiscale Electrical Impedance Tomography

Marc Pessel<sup>1</sup> and Dominique Gibert<sup>2</sup>

Géosciences Rennes - CNRS/INSU, Université Rennes 1, France

Submitted to *Journal of Geophysical Research*, July 2000.

**Abstract.** The non-linear inverse problem of electrical impedance tomography is addressed through a simulated annealing approach combined with a multi-scale parameterization of the conductivity model. The multi-scale inversion is done in a sequential way by inverting progressively complicated model incorporating more and more finer details. Each model re-sampling is preceded by a decision stage based on sensitivity analysis. The use of a non-linear inversion algorithm is necessary for the solution to escape from eventual local maxima of the posterior probability. Simulated annealing is efficient to tackle with this task. A synthetic example illustrates how the algorithm automatically adapt the model to a multi-scale structure. A field example with pole-dipole resistivity data acquired in a well-studied mining region concludes the study.

## 1. Introduction

Electrical resistivity methods are among the favorite geophysical techniques used in shallow-depth geophysics and considerable work has been done to improve their efficiency. Modern multi-electrode data collection systems provide high-quality measurements with dense coverage [Asch and Morrison, 1989], and electrical impedance tomography is now currently used in hydrology [Bevc and Morrison, 1991; Daily et al., 1992; Park, 1998; Hagrey and Michaelson, 1999; Nowroozi et al., 1999], environmental re-mediation [Van et al., 1991; Spie and Ellis, 1995; Daily and Ramirez, 2000], and spill monitoring [Ramirez et al., 1993]. Electrical impedance tomography is generally formulated as an inverse problem which aims at reconstructing the electrical conductivity (or resistivity) distribution underground from electrical potential measurements made at the boundaries of the region to be imaged (see for instance Ward [1990] for a review). Both the inverse problem and the dual direct problem, which gives the electrical response for a known conductivity distribution, benefitted from recent numerous breakthroughs [e.g. Berryman and Kohn, 1990; Ellis and Oldenburg, 1994a, 1994b; Li and Oldenburg, 1994; Borcea et al., 1999]. However, the inverse problem remains a notoriously difficult one because of both its highly non-linear nature and its ill-posedness [Allers and Santosa, 1991; Cherkava and Tripp, 1996]. An important cause of the ill-posedness of the electrical tomography problem is the ill-conditioning implicit in the non-linear system of equations to be solved. The ill-conditioning is due to the weak coupling among some equations of the system to be solved, and the transfer of information from the data to the parameters to determine is partly suppressed. In practice, the ill-conditioning implies that several parameters are unresolved, i.e. their values cannot be obtained from the data. If, when varied in reasonable limits, a given parameter does not produce changes in the data above the noise level, this parameter will not be determined properly, and it should be suppressed from the model. In this paper, we address the practical issues concerning the reduction of ill-conditioning by seeking for an optimal parameterization with respect to the information content of the data. This is done by means

of a multi-scale sampling of the conductivity distribution to be recovered. This approach increases the non-linear nature of the inverse problem since, in practice, we are faced with an inverse problem whose number of parameters increases as the iterative inversion proceeds. However, the computational power now available with desktop computers enables the use of a fully non-linear approach, namely simulated annealing [Kirkpatrick et al., 1983; Van Laarhoven and Aarts, 1987]. This Monte-Carlo method is well-suited to tackle with the non-linear nature of the inverse problem by providing possibilities to escape from local minima of the cost function corresponding to non-optimal solutions. Also, simulated annealing allows a free choice of the cost function to be minimized, hence preserving the possibility to easily incorporate a priori geological constraints concerning the conductivity distribution to reconstruct.

The next section of the paper presents the multi-grid method used to solve the 2.5D forward problem. The efficiency of this methods reveals why a multi-scale inversion should also be natural. The following section presents the multi-scale inversion strategy and its implementation through simulated annealing. The last section contains a field example.

## 2. Multi-Grid Forward Modeling

### 2.1. 2.5D Formalism

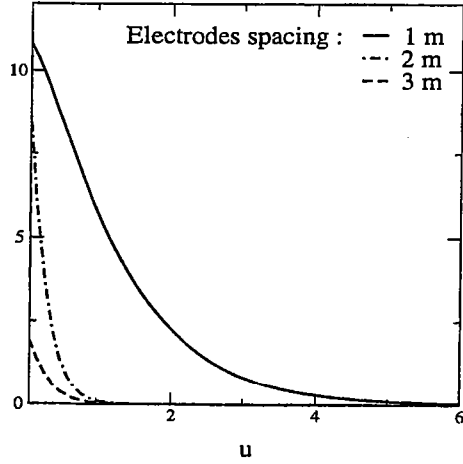
The fundamental equation describing the stationary current flow in the conducting Earth is the Poisson equation [e.g. Zhdanov and Keller, 1994],

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = -I, \quad (.13)$$

where  $\phi$  is the electrical potential,  $\sigma$  is the conductivity distribution, and  $I$  is the current source term. In the 2.5D approximation which will hereafter be used, the conductivity distribution is assumed invariant along the horizontal  $y$  axis, and the source term  $I$  is restricted to the  $y = 0$  vertical plane.

<sup>1</sup>M. Pessel, Géosciences Rennes, Université Rennes 1, Bât. 15 Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, FRANCE. (e.mail pessel@univ-rennes1.fr)

<sup>2</sup>D. Gibert, Géosciences Rennes, Université Rennes 1, Bât. 15 Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, FRANCE. (e.mail gibert@univ-rennes1.fr)



**Figure 1 :** Spatial Fourier spectrum of the electrical potential measured along the  $y$  direction. The spectral amplitude is a sharp decreasing exponential-like function of the spatial frequency  $u$ . Hence, the numerical integration of equation (.19) may be done with a limited number of discrete spatial frequencies sampled in a limited interval centered on the zero frequency. The width of the interval is controlled by the electrode spacing.

The resulting 3D potential  $\phi$  is thus an even function with respect to  $y$ . In this case, equation (.13) becomes

$$\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \phi(x, y, z)] = -I(x, z) \delta(y). \quad (.14)$$

By Fourier transforming this equation in the  $y$  direction [Madden, 1971; Pelton et al., 1978; Tripp et al., 1984] we obtain a 2D Poisson equation :

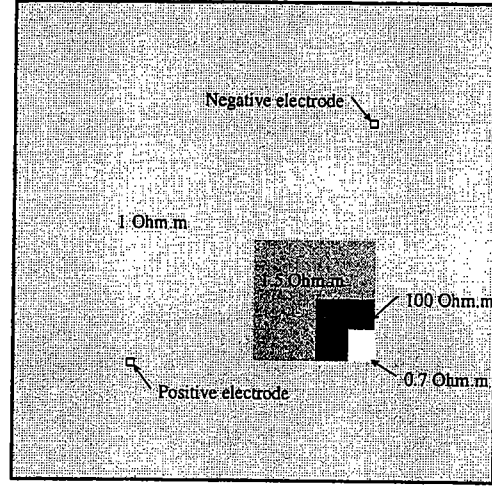
$$\nabla_{xz} \cdot [\sigma(x, z) \nabla_{xz} \tilde{\phi}(x, u, z)] = -I(x, z) + (2\pi u)^2 \sigma(x, z) \tilde{\phi}(x, u, z), \quad (.15)$$

where  $\nabla_{xz}$  represents the 2D gradient operator with respect to the  $x$  and  $z$  variables,  $u$  is the dual spatial frequency corresponding to  $y$ , and  $\tilde{\phi}$  is the Fourier transform of the potential  $\phi$  :

$$\tilde{\phi}(x, u, z) = \int \phi(x, y, z) \exp(-2i\pi uy) dy. \quad (.16)$$

For a given frequency  $u$ , the additional source term in equation (.15) depends on both the frequency and the potential, and is distributed in the whole  $y = 0$  plane. This source term corresponds to leaking conductances whose physical sense is to allow the electrical current to flow in the  $y$  direction [Dines and Lytle, 1981]. The 3D potential  $\phi(x, y, z)$  is obtained by solving the 2D equation (.15) and then inverse Fourier transforming  $\tilde{\phi}(x, u, z)$  :

$$\phi(x, y, z) = \int \tilde{\phi}(x, u, z) \exp(+2i\pi uy) du. \quad (.17)$$



**Figure 2 :** Resistivity model used to construct the potential shown on Figure 3. The three blocks have a side size of 64, 32 and 16 grid meshes and an electrical resistivity of 1.5, 100.0 and 0.7  $\Omega.m$  respectively. The background resistivity equals 1.0  $\Omega.m$ .

Since the potential electrodes are assumed localized in the  $y = 0$  plane, it is sufficient to know the electrical potential in this plane and (.17) simplifies into :

$$\phi(x, 0, z) = \int \tilde{\phi}(x, u, z) du. \quad (.18)$$

In practice, equation (.15) is solved for several discrete frequencies  $u$ , and the integral (.18) is approximated by

$$\phi(x, 0, z) = \sum_u \tilde{\phi}(x, u, z), \quad (.19)$$

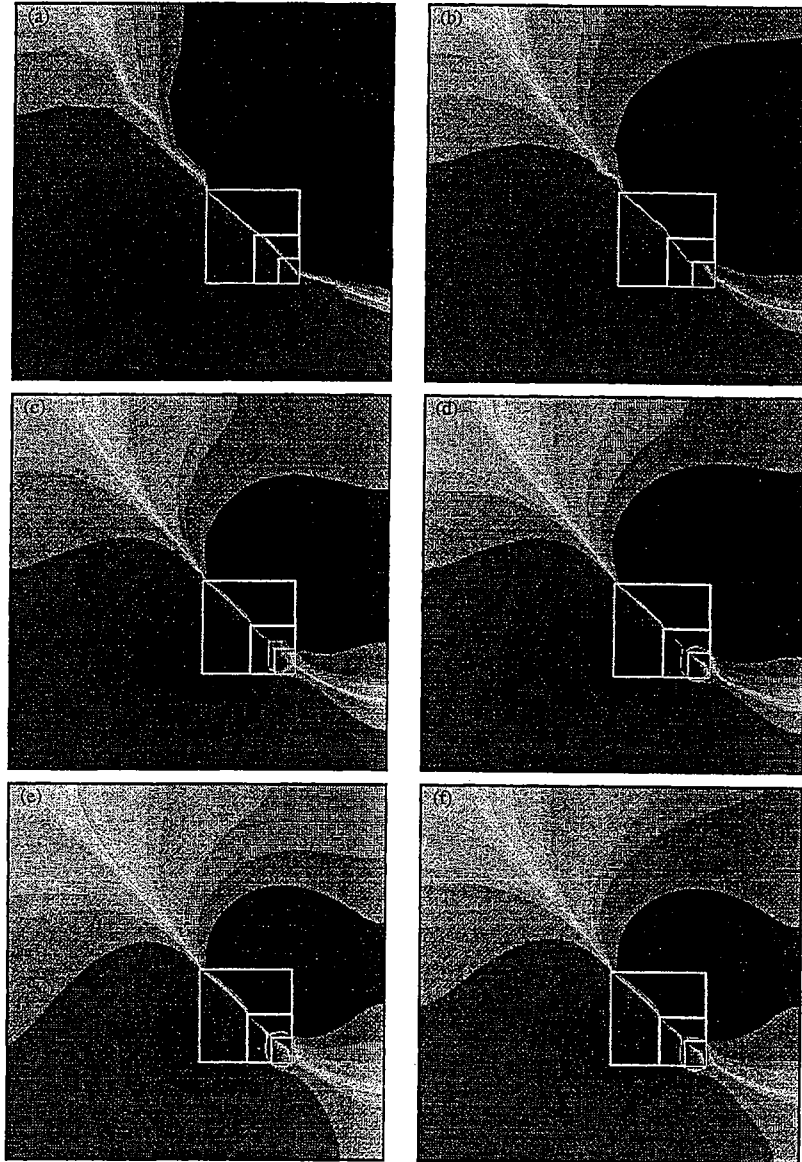
where the sum symbol represents a numerical integration over the variable  $u$  which can be done with standard algorithms [Press et al., 1992]. Hopefully, the integration can be accurately performed with a small number of discrete spatial frequencies since the Fourier transform  $\tilde{\phi}$  is a decreasing exponential-like function centered on the zero frequency (Figure 1).

## 2.2. Multi-Grid Numerical Solution

We use a multi-grid algorithm to solve equation (.15) since this method is known to be extremely efficient for numerically solving elliptic partial differential equations [Press et al., 1992]. The general principle of multi-grid methods is to sequentially construct the solution from coarse grids to finer ones. The approximate low-resolution solution obtained on a given coarse grid is used as a starting solution for the next finer grid.

By this way, the algorithm overcomes the well-known slow convergence of classical relaxation methods since the long wavelengths of the potential are first relaxed on the coarsest grids through which the information is more quickly transferred between the grid nodes.





**Figure 3 :** (a-f) Graphs of the secondary electrical potential solutions obtained at successive grid levels for the multi-grid forward problem corresponding to the conductivity model shown in Figure 2. The grid sizes are  $8^2$ ,  $16^2$ ,  $32^2$ ,  $64^2$ ,  $128^2$ , and  $256^2$  for labels (a) to (f) respectively. The secondary potential is defined as the total potential minus the potential corresponding to a uniform model with the background resistivity ( $1.0 \Omega.m$ ). As the grid mesh becomes finer (i.e. the grid size increases), more and more small-scale details appear in the potential (negative and positive values are in deep grey and light grey respectively).

As the algorithm proceeds with finer grids, more details of the conductivity distribution are taken into account and small-wavelength features are progressively incorporated into the potential. This is shown in Figure 3 which represents the secondary potentials for successive grid levels. The resistivity model (Figure 2) contains three blocks with very different sizes ( $64$ ,  $32$  and  $16$  grid meshes in size and resistivities of  $1.5$ ,  $100.0$  and  $0.7 \Omega.m$  respectively) embedded in a uniform background resistivity of  $1.0 \Omega.m$ . A secondary potential is

defined as being the total potential minus the potential produced in a uniform medium by the injection electrodes (Figure 4). One can observe that more and more small-scale details are incorporated into the solution as the algorithm proceeds from the coarsest  $8 \times 8$  grid (Figure 3a) to the finest  $256 \times 256$  grid (Figure 3f).

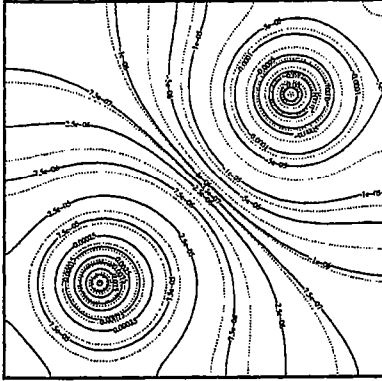


Figure 4 : Primary potential obtained for a uniform background with a resistivity of 1.0  $\Omega.m$  and injection electrodes as shown in Figure 2.

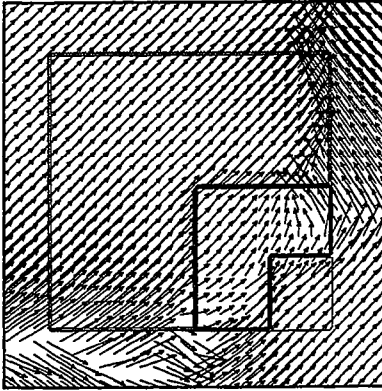


Figure 5 : Flow lines of the electrical current crossing the resistivity structure shown in Figure 2. The secondary extrema of the secondary potential (Figure 3f) are located where the electrical current flows almost perpendicularly to an edge, and where the charge accumulation is maximum.

### 3. Multi-Scale Inversion by Simulated Annealing

#### 3.1. Introduction

Recovering the conductivity distribution from potential measurements is a non-linear and ill-posed inverse problem [Kohn and Vogelius, 1984]. Ill-posedness may partly be due to the under-determination if the number of parameters describing the conductivity distribution is much larger than the number of data, a common situation even for multi-electrode devices [e.g. Li and Oldenburg, 1992]. Another cause for ill-posedness comes from non-uniqueness induced by both the noise which corrupts the data and the incomplete data coverage [e.g. Breckon and Pidcock, 1987]. The latter point may be seen by applying the Green's function formalism to the Poisson equation (.13) [e.g. Snyder, 1976] in order to recast the problem in terms of an integral equation. The potential  $\phi$  induced by a current point-source located at point  $r_i$  and measured at point  $r_m$  is given by,

$$\phi(r_m | r_i) = \frac{I(r_i)}{2\pi\sigma(r_i)|r_i - r_m|}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{\nabla \ln \sigma(r) \cdot \nabla \phi(r | r_i)}{|r - r_m|} dv, (.20)$$

where  $I$  is the current injected at point  $r_i$ , and  $V$  is the lower half-space including the whole conducting ground. The first right-hand term of equation (.20) is the primary potential created by the injection electrode and does not provide information about the conductivity distribution  $\sigma$  excepted at point  $r_i$ . Indeed, the primary potential is the one obtained for a uniform medium with a conductivity  $\sigma(r_i)$ . An example of such a primary potential associated with two injection electrodes is shown in Figure 4. Information concerning the whole conductivity distribution is contained in the integral of equation (.20) which represents the secondary potential created by the volumetric charge density

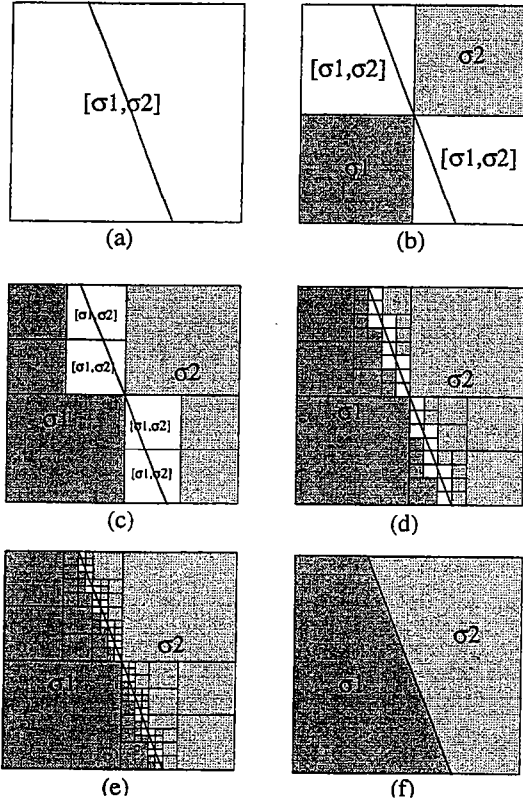
$$Q(r | r_i) = 2\epsilon_0 \nabla \ln \sigma(r) \cdot \nabla \phi(r | r_i). (.21)$$

This charge density depends on the potential  $\phi$  whose characteristics are controlled by both the conductivity distribution  $\sigma$  and the point  $r_i$  where the current is injected. The fact that the charge density depends on the potential which, itself, depends on the conductivity distribution, makes equation (.20) and the related inverse problem non-linear. A high charge density  $Q$  is found in regions with sharp conductivity gradients on the edges of the conducting bodies, and also where the electrical current flows almost perpendicularly across these edges. If the electrical current flows parallel to an edge of a conducting body, no charges are created and the secondary potential carries no information concerning this particular edge. This can be observed in Figure 3 where the secondary potential possesses secondary extrema only on certain edges of the blocks. These edges correspond to charge accumulation where the electrical current flow lines are almost perpendicular to the frontiers of the blocks (Figure 5). Hence, to correctly image the edges of a conducting body, it is necessary to make measurements of the potential for different injection points  $r_i$  so that the electrical currents cross the body in all directions [Li and Oldenburg, 1992]. When such multi-electrode data are available, the inverse problem may be formulated in term of a collection of unknown charge densities, one for each injection point. Alternatively, a multi-electrode data set can be inverted as a whole if the inverse problem is formulated in term of the conductivity distribution.

As stated in Section 2, the direct problem solves equation (.13) for a given conductivity distribution  $\sigma$ . However, the integral formulation of the direct problem given in equation (.20) which relates the measured potential to the whole electrical structure reveals that the fundamental quantity related to the data is the logarithm of the electrical conductivity distribution,  $\ln \sigma$ . For this reason, the unknown quantity we chose to determine in the inverse problem is the logarithm of the conductivity. This makes the inversion invariant (excepted for the signum) with respect to the particular choice of the physical quantity of interest which may be either the conductivity or the resistivity.

#### 3.2. Adaptive Multi-Scale Parameterization

The under-determination of the inverse problem depends on the particular parameterization used to modelize the unknown conductivity distribution.



**Figure 6 :** Optimal multiscale paving of a faulted structure. The resampling adds finer and finer blocks to the conductivity distribution in order to better and better describes the geometry of the actual structure. Each resampling step is a dyadic operation which consists in dividing some blocks into four equal-sized sub-blocks (see also Figure 7).

In the case of a representation with a compact paving of blocks  $V_k$  such that the half-space

$$V = \bigcup_k V_k \quad (.22)$$

with

$$V_i \cap V_{j \neq i} = \emptyset, \quad (.23)$$

equation (.20) may be rewritten as :

$$\begin{aligned} \phi(r_m | r_i) = & \frac{I(r_i)}{2\pi\sigma(r_i)|r_i - r_m|} \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{V_k} \frac{\nabla \ln \sigma(r) \cdot \nabla \phi(r | r_i)}{|r - r_m|} dv, \quad (.24) \end{aligned}$$

where the integral in equation (.20) has been splitted into a sum of integrals over each block  $V_k$ . Blocks where either no sharp conductivity gradient exists or no well-oriented electrical current flows correspond to almost vanishing integrals. From the point of view of inverse problem theory, this results in under-determined quantities which, in turn, produce an ill-conditioned non-linear system of equations.

This problem remains whatever the parameterization adopted to represent the conductivity distribution (e.g. blocks with constant conductivity, spline, polynomials, wavelets, etc.). However, equation (.24) shows that optimal block-representations of the conductivity distribution should be such that every block  $V_k$  has a significant integral with respect to the data. On one hand, dealing with such a representation regularizes the inverse problem by reducing both its condition number and the number of unknown parameters [e.g. *Yorkey*, 1990]. On the other hand, this makes the inverse problem more complicated because the block decomposition has, by itself, to be determined during the inversion.

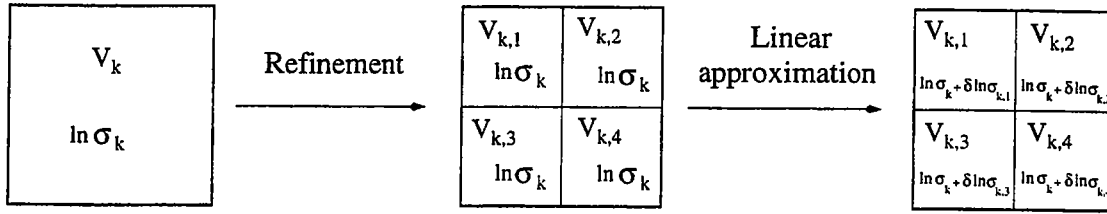
Indeed, this approach has to be considered in term of an adaptive multi-scaled parameterization since its particular characteristics depend on both the actual (unknown) conductivity distribution and the data available.

In the present paper, we represent the distribution  $\ln \sigma$  with a compact paving of the class described by equations (.22) and (.23) made with irregular cells of constant conductivity. Each cell is a cluster of meshes of the finest grid used to describe the conductivity distribution. This type of paving allows a fine fitting to oblique multi-scale structures like the one shown on Figure 6. Other multi-scale decompositions like, for instance, wavelet decomposition could be used as well [*Holschneider*, 1995], and our cell decomposition could actually be formulated in term of the Haar wavelet transform. The advantage of the multi-scale approach is that it is able to describe complex conductivity distributions with a small number of parameters since small-size cells are placed only where significant small-scale variations in the conductivity exist [e.g. *Mehrabi and Sahimi*, 1997]. The same property makes the wavelet transform a useful tool to compress complex signals [e.g. *Moreau et al.*, 1996].

In practice, the multi-scale block decomposition of the conductivity model is progressively constructed while the inversion progresses. This can be implemented in a way similar to the one adopted to solve the forward problem where (see Section 2), thanks to the elliptic nature of the Poisson equation, the potential field inside the conducting medium is efficiently computed through a multi-grid procedure which gradually refines the potential by incorporating smaller and smaller scales in the conductivity model. This hierarchical approach is kept for the inversion which first searches for a coarse block decomposition of the conductivity and, next, progressively includes finer blocks in the model (Figure 6). However, contrarily to what is done in the forward multi-grid procedure, the refinement of the block decomposition must be controlled in order to only incorporate those blocks which are significant with respect to the data available. This issue is addressed in the next Section.

### 3.3. Sensitivity Analysis and Grid Refinement

An important issue is to control the refinement of the block decomposition of the conductivity model. Let us suppose that the inversion presently deals with a given block decomposition for which the optimal conductivity has been obtained, i.e. the minimum of the cost function has been reached. The next step is to decide if a refinement of the block model is desirable to eventually further reduce the cost. From the most general point of view, this problem may be addressed by comparing the improvement of the cost against the price paid by adding parameters in the model.



**Figure 7 :** Principle of a priori conductivity estimation at the beginning of each resampling step. A given grid mesh  $V_k$  (left) is divided into four blocks whose conductivities are initially set to  $\sigma_k$  (middle). Then, a sensitivity analysis based and a linear approximation are used to refine the conductivity of each block individually (right).

This can be done through a statistical Fisher test if Gaussian statistics are assumed valid [Menke, 1984], or with more general non-parametric decision criteria like those used to determine the order of ARMA models in signal processing [Akaike, 1965; Rissanen, 1978; Gibert and Virieux, 1991; Moreau et al., 1996]. Unfortunately, this approach is an a posteriori decision, i.e. it is necessary to obtain the solution of the refined model before applying the decision criteria. In the present study, a straightforward application of this method would imply to solve a huge number of models, and, in order to save computer time, we performed a prior sensitivity analysis to determine whether or not a given block refinement is sufficiently significant to warrant for a full inversion.

Let the current conductivity model with  $K$  blocks issued from the last step of the inversion process be

$$m_l = \{b_1, \dots, b_k, \dots, b_K | \sigma_1, \dots, \sigma_k, \dots, \sigma_K\}, \quad (.25)$$

where the  $b_k$  represent the blocks and  $\sigma_k$  their conductivities. In practice, each block is identified by a particular flag attributed to a set of meshes belonging to the finest conductivity grid used in the multi-grid forward problem. All meshes sharing a common flag have the same conductivity and constitute a single block in the model. Our strategy for model refinement is to sequentially consider each block  $b_k$  as a candidate for refinement by subdividing it into four sub-blocks  $\{b_{k,1}, b_{k,2}, b_{k,3}, b_{k,4}\}$  whose conductivities  $\{\sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}, \sigma_{k,3}, \sigma_{k,4}\}$  are to be determined in the subsequent inversion steps. Once the splitting of block  $b_k$  has been realized, a sensitivity analysis is performed on the new four sub-blocks in order to test their influence on the data. This is done by successively assigning a conductivity  $\sigma_{k,i} = \sigma_k + \delta \sigma$  to each sub-block while the other three blocks keep the conductivity  $\sigma_k$  of their father block  $b_k$ . The solutions of the forward problems corresponding to these new conductivity models give an insight of their influence on the data, and if a significant influence is found for at least one new sub-block, it is decided to reestimate the refined conductivity model by pursuing the inversion. The refinement procedure, i.e. the replacement of the current conductivity model by another one with more small-scale blocks, induces changes in the conductivities of adjacent non-refined blocks since the refinement modifies the global electrical current pattern. In practice, we observed that, in many situations, the conductivities are correctly re-estimated only when a full non-linear inversion method is used. We chose a simulated annealing approach which we found efficient in previous studies [Gibert and Virieux, 1991; Gibert et al., 1994; Courboulex et al., 1996]. The practical issues concerning simulated annealing applied to the present inverse problem are described in the next Section.

ling applied to the present inverse problem are described in the next Section.

### 3.4. Simulated Annealing

Simulated annealing is a stochastic non-linear algorithm well-adapted to solve the present inverse problem whose cost function may possess local minima. Also, simulated annealing is a flexible method which allows a free choice of the cost function and an easy account of a priori information concerning the conductivity distribution to reconstruct. Originally proposed by Kirkpatrick et al. [1983] and Cerny [1985], simulated annealing shares both the stochasticity of Monte Carlo methods and the perturbative nature of gradient methods. For a general introduction to simulated annealing see, for instance, the book by van Laarhoven and Aarts [1987]. An appraisal of simulated annealing in the context of inverse problem theory is given by Tarantola [1987].

The basic principle of simulated annealing is to iteratively modify the model until it converges toward the minimum of the cost function to be minimized. In order to keep a memory in the sequence of models generated during the iterations, the model created at iteration  $l$  is obtained by perturbing the previous model in the sequence :

$$m_l = m_{l-1} + \delta m_l, \quad (.26)$$

where the random perturbation  $\delta m_l$  must be such that an importance sampling of the a priori distribution of the models is guaranteed. Once model  $m_l$  is created, its posterior probability  $p(m_l)$  is computed in order to decide whether or not  $m_l$  is to be kept in the sequence of models. The acceptance probability of the transition from model  $m_{l-1}$  to model  $m_l$  is given by

$$p_T(m_{l-1} \rightarrow m_l) = \min \left[ 1, \left( \frac{p(m_l)}{p(m_{l-1})} \right)^{1/T} \right], \quad (.27)$$

where  $T$  is a positive parameter called the temperature [Kirkpatrick et al., 1983]. The probability (.27) is such that when the new model is worse than the previous one, i.e. when  $p(m_l) < p(m_{l-1})$ , the transition is not systematically rejected. Conversely, if the new model is better than the previous one, i.e.  $p(m_l) > p(m_{l-1})$ , the new model is systematically accepted. Iterating over a sequence of models  $m_l$  at a constant temperature constitutes the Metropolis algorithm [Metropolis et al., 1953]. It can be shown that, for an infinite number

of iterations, the model distribution resulting from this algorithm is distributed according to the probability density [Mosegaard and Tarantola, 1995],

$$p_T(m_l) = \frac{1}{C} p(m_l)^{1/T}, \quad (.28)$$

where  $C$  is a normalization constant. At  $T = 1$ ,  $p_{T=1}(m_l) = p(m_l)$ , and the Metropolis algorithm then performs an importance sampling in the sense that the sampling density of the models into the a priori space equals the a posteriori probability density of the models. Simulated annealing loops over the Metropolis algorithm while the temperature decreases in order to guide the sampling toward the region where the posterior probability is maximum. Assuming that the starting temperature may be considered infinite, the probability (.28) is uniform and any model belonging to the a priori space is accepted. As long as the temperature decreases, the probability (.28) becomes irregular with hills and valleys, and the importance sampling concentrates the accepted models on the hills. Finally, when  $T \downarrow 0$ , the probability is reduced to a Dirac  $\delta$  function located at the best model :

$$p_{T \downarrow 0}(m_l) = \delta(m_l - m_{best}). \quad (.29)$$

An important aspect of simulated annealing is to properly design the cooling schedule which controls the efficiency of the guidance toward the maxima of the a posteriori probability. A common guideline is to decrease the temperature sufficiently slowly so that the importance sampling gently diffuses and concentrates around the maximum of the posterior probability [Van Laarhoven and Aarts, 1987]. Another important issue of simulated annealing is to define the model-generation process (.26) in order to properly sample the a priori space of models. For instance, it is desirable to produce models according to the a priori probability of the models, a delicate problem when geological constraints have to be accounted for. This can be done by several ways, depending on the particular constraints to be satisfied. For instance, projections onto convex sets may be efficient for a number of properties [Menke, 1991], although slow convergence may sometimes render the method less efficient. In absence of method which directly produce acceptable models, the Metropolis algorithm described above may be used to select the generated models according to an importance sampling of the a priori model space. In the present study, the only a priori constraints we applied are hard bounds on the conductivity values.

Another key issue of the algorithm concerns the transition from one discretization level to the finer next one. As explained in the previous section, this is done by sequentially applying the re-sampling to each block in order to test for the sensitivity with respect to the data (Figure 7). Although the so-created four blocks could be given the conductivity of their father-block as starting conductivities,

$$\{\sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}, \sigma_{k,3}, \sigma_{k,4}\} = \{\sigma_k, \sigma_k, \sigma_k, \sigma_k\}, \quad (.30)$$

we observe that the inversion can be speeded-up by assigning prior conductivities derived from the linearized inverse solution estimated for the model (.30). This is numerically implemented by computing the matrix  $\bar{A}$  of the Fréchet's derivatives (i.e. the partial derivatives of the model predictions  $\hat{d}_i$  with respect to the parameters  $\ln \sigma_{k,j}$ ),

$$A_{i,j} = \frac{\partial \hat{d}_i}{\partial \ln \sigma_{k,j}}, \quad (.31)$$

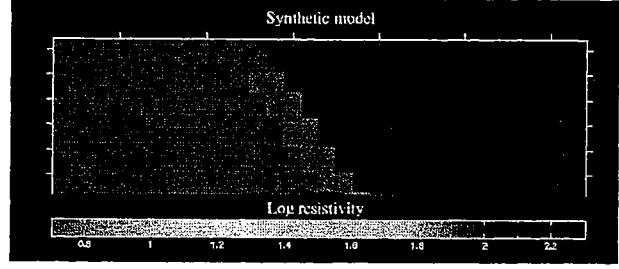


Figure 8 : Resistivity model used to produce the synthetic data of the synthetic example. The resistivity distribution possesses both large-scale and small-scale features.

while performing the sensitivity analysis described in the previous section. The perturbations  $\delta \ln \sigma_{k,j}$  are then obtained by solving

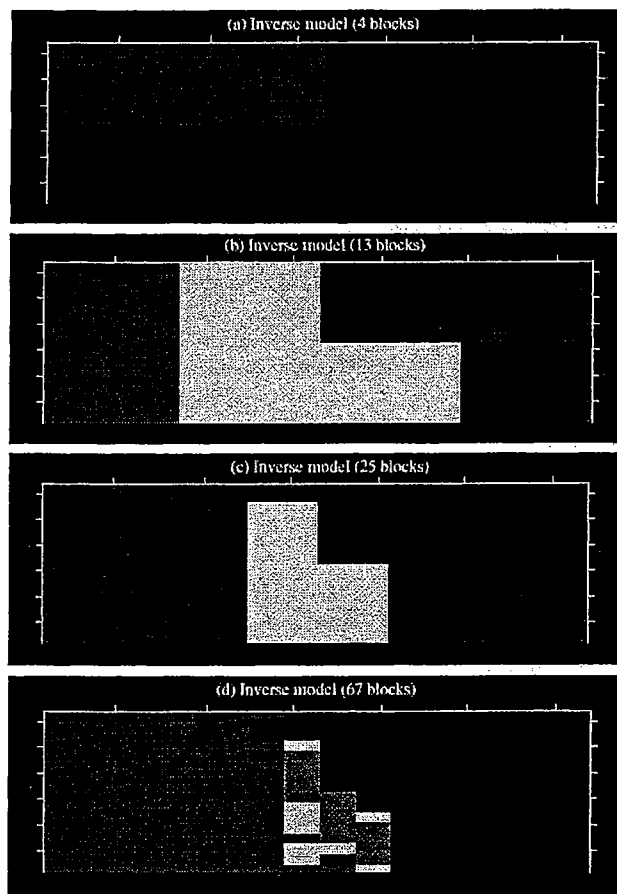
$$\bar{A} \cdot \begin{pmatrix} \delta \ln \sigma_{k,1} \\ \delta \ln \sigma_{k,2} \\ \delta \ln \sigma_{k,3} \\ \delta \ln \sigma_{k,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ d_i - \hat{d}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (.32)$$

with a singular values decomposition, where the  $d_i$  are the data, and the conductivities assigned to the blocks are such that

$$\{\ln \sigma_{k,j}\} = \{\ln \sigma_{k,j} + \delta \ln \sigma_{k,j}\}. \quad (.33)$$

### 3.5. Synthetic Example

We now illustrate the whole inversion procedure through a simple synthetic example where the conductivity distribution to recover is shown in Figure 8. It can be seen that this structure is multi-scale and possesses both large homogeneous areas and small-scale heterogeneities. The synthetic data have been generated by using five pairs of injection electrodes on both lateral sides and on the top side of the model, all other electrodes being used as potential electrodes. The data set then consists of  $15 \times 94 = 1410$  potential values. In order to assess for the capability of our re-sampling algorithm to correctly adjust to the structure to be recovered, no noise was added to the synthetic data. So, the particular choice of an a posteriori probability distribution for the data residuals is meaningless and, in the present example, we use a Gaussian distribution with unit variance. The inversion begins with a single-block model whose conductivity is determined through a quick annealing sequence. Figure 9 shows the best models obtained during a 4-step re-sampling sequence where the smallest allowed block-size varies from  $1/2$  to  $1/16$  unit length. The final first-level solution (Figure 9a), issued from the zero-level (with a single block), counts 4 blocks with differing conductivities. As can be seen, this coarse model already reproduce the large-scale structure of the synthetic model (Figure 8).

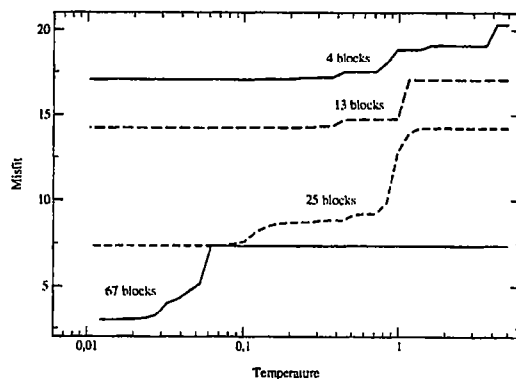


**Figure 9 :** Solutions obtained at the end of each inversion of a 4-steps resampling sequence applied to the synthetic data corresponding to the synthetic model shown in Figure 8. At the beginning of each step of the resampling sequence, a sensitivity analysis is performed to identify the blocks which have to be divided into four equal-sized sub-blocks. A simulated annealing inversion follows to obtain the conductivity distribution corresponding to this new parameterization. It can be seen that the resampling automatically restricts itself to areas where the actual conductivity model possesses small-scale features (Figure 8).

The second-level solution (Figure 9b) has been partly re-sampled and the upper-right block of the first-level model has been preserved. Interestingly, we observe that the re-sampling has been automatically restricted in an area containing the small-scale heterogeneities of the synthetic model. As a consequence, the second-level solution only counts 13 blocks instead of 16, the number corresponding to a full re-sampling of the first-level solution.

The next three-level and fourth-level solutions further refine the solution around the small-scale features while remaining coarse-scaled elsewhere. This results in solutions with a dramatically reduced number of parameters (i.e. blocks) since the final fourth-level solution only counts 67 blocks instead of

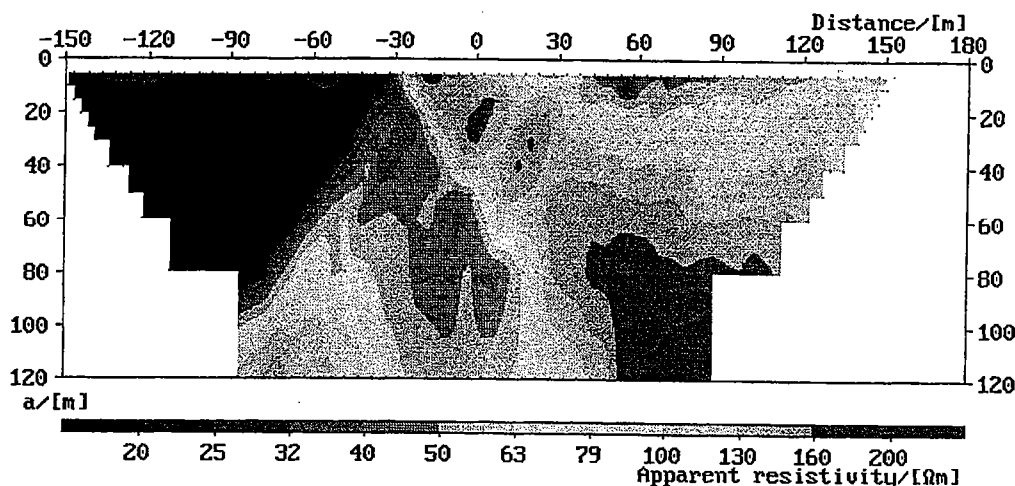
the 256 blocks of the fully-resampled solution.



**Figure 10 :** Cooling series of the 4-steps resampling sequence corresponding to the solutions shown in Figure 9. For each step corresponding to a given parameterization of the conductivity model, the misfit displays a sharp decrease corresponding to the convergence toward an optimal solution before the misfit remains constant when the temperature continues to decrease. A further decrease of the misfit is obtained after each resampling step which allows the conductivity distribution to possess finer and finer details.

Figure 10 shows the evolution of the misfit (here the sum of squared residuals) during the inversion process which consists in 4 successive simulated annealing sequences. The first one corresponds to the first-level solution with four blocks, and the misfit evolution is given by the upper curve in Figure 10 which indicates a global decrease of the misfit when the annealing temperature varies from 5 to 0.01.

The step-like nature of the misfit curve demonstrates the existence of several critical temperatures instead of the single one generally observed in simulated inversions [e.g. *van Laarhoven and Aarts, 1987*]. Such a behavior is observed when a hierarchical order exists among the parameters of the inverted model [e.g. *Gibert and Virieux, 1991*]. In the present instance, the hierarchy comes from the fact that the synthetic data are much sensitive to the shallowest blocks of the model. Consequently, the simulated annealing inversion first roughly adjusts the conductivity of these blocks, producing the first step-like decrease of the misfit near  $T = 4$ , and then refines the solution by adjusting the conductivity of the entire model, producing the second main step in the misfit curve near  $T = 1$ . No further significant improvement is observed at lower temperatures, and the process could have been stopped at  $T = 0.1$ . The second-level inversion also starts at  $T = 5$ , and begins with a plateau in the misfit curve until  $T = 1$  where the first improvement of the model is obtained. It would be erroneous to think that the simulated annealing should have started at  $T = 1$  because the sequence of models generated at high temperature performs a global sampling of the model space and allows to escape from possible local minima of the misfit function. Indeed, this kind of re-annealing is a key-point of the algorithm.



**Figure 11 :** Data obtained for the pole-dipole array and arranged in a pseudo-section of the logarithm of the apparent resistivity. The remote electrode is 1000 m westward, i.e. on the right of the profile. The dike is approximately located at  $x = -30$  m. Since the remote electrode is on the resistive right part of the profile, the apparent resistivities are biased toward the high values (compare with the inverted resistivity sections shown in Figure 12).

#### 4. Inversion of the Pont-Péan Data

##### 4.1. Geological Context and Field Operations

The Pont-Péan mining site corresponds to a dioritic mineralized dike which has been intensively prospected and exploited during the 18th and 19th centuries until a massive flood invaded the galleries in April 1904 and definitely stopped the industry. The dike is approximately 15 m thick, 4 km long, and almost north-south oriented with an eastward inclination of  $80^\circ$ . The dike, which has been dug down to 600 m in depth, is located in a fault plane separating Precambrian schist on the western side from Tertiary sediments on the eastern side. The thickness of the Tertiary sediments is about 80 m at the locus of the electrical profile.

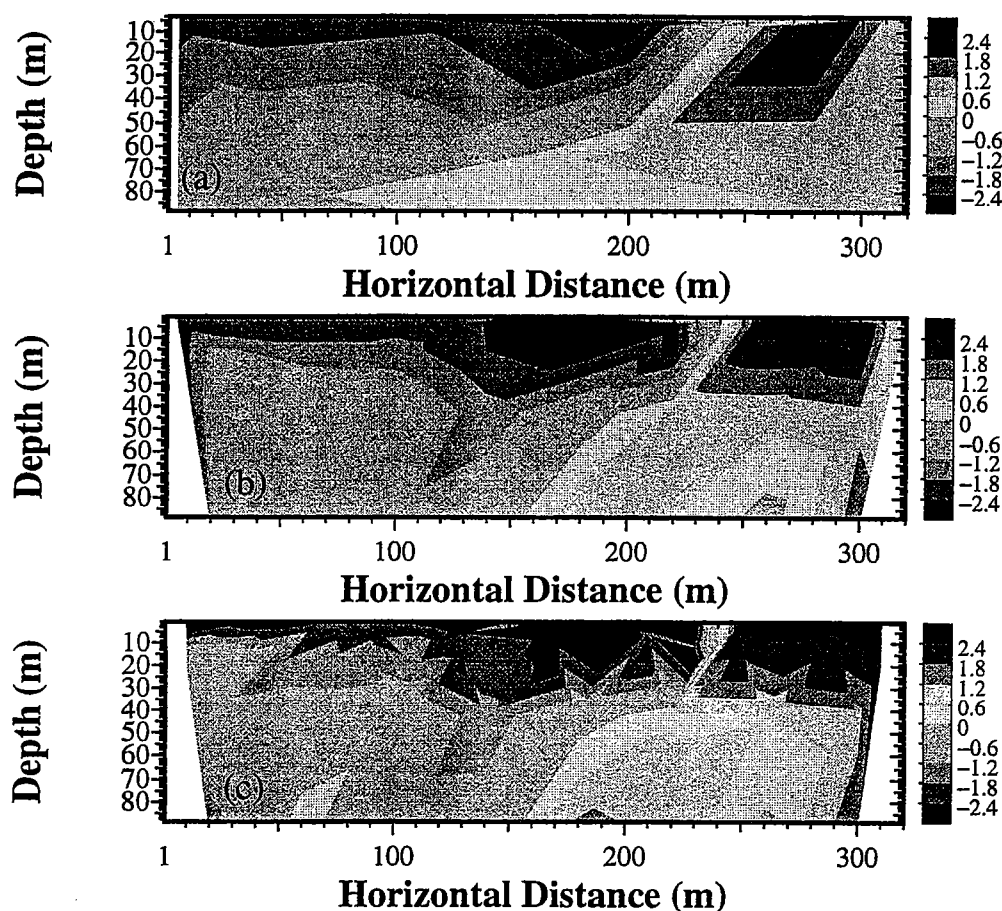
The electrical resistivity survey was performed with a 64-electrode ABEM system with a pole-dipole array of 315 m long with an electrode spacing of 5 m. For practical reasons, the pole-dipole survey was not symmetrical and all measurements were acquired with the remote electrode located 1000 m westward. For most data, the relative signal-to-noise ratio is greater than 99% with much smaller values for a limited number of measurements corresponding to poor electrode-contacts. The pole-dipole pseudo-resistivity section constructed with 360 measurements is shown in Figure 11 and displays low apparent resistivities on the eastern side in rough accordance with the known geological structure of the site. The fact that all data were acquired with the remote electrode kept on the right side of the profile produces a bias of the apparent resistivities toward the true resistivity of the western part of the profile which results in an important shrinking of the conductive part of the apparent resistivity section (Figure 11) [Ward, 1990]. However, the apparent-resistivity section is typical of the one expected for a two-block structure with a nearly vertical fault plane located at  $x = -30$  m.

##### 4.2. Inversion

The inversion of the Pont-Péan data follows the same step as the one performed for the synthetic example. However, in order to account for eventual outliers in the data set, a Cauchy distribution is retained for the a posteriori probability distribution of the data residuals. The inversion begins with a  $4 \times 2$  blocks model (Figure 12a) which already displays a conductivity distribution corresponding to the expected geological structure. In the next step of the inversion, this coarse model is fully re-sampled into a  $8 \times 4$  blocks model shown in Figure 12b. This latter model further refine the conductivity distribution determined during the first step of the inversion, particularly in the middle of the profile near the fault location. For the last step of the inversion the re-sampling is restricted to the upper half-part of the model leading to a total of 80 blocks. This allows a refinement of the conductivity distribution in the shallowest part of the structure. Observe that this also produces slight changes in the lower part of the conductivity distribution. This indicates that, after a re-sampling, the whole conductivity model must be re-inverted even if some parts of the model have not been re-sampled.

##### 4.3. Interpretation

Although the present paper is not devoted to the geological interpretation of the Pont-Péan mining area, the results obtained from the inversion discussed above deserve several comments. The final resistivity section (Figure 12c) shows a clear two-block structure with a conductive region in the eastern part of the profile and a more resistive one in the western part. Although in qualitative agreement with the known geological structure of the site, the limit between the resistive and the conductive parts is significantly shifted westward with respect to the known location of the fault. This indicates that the schist located in the vicinity of the fault are more conductive than the ones located at the western end of the profile.



**Figure 12 :** Resistivity sections obtained during the inversion of the pole-dipole data. The logarithm of the resistivity is shown with the same color scale as in Figure 11. a) Final resistivity section obtained on the coarsest  $4 \times 2$  grid. b) Final resistivity section corresponding to the refined  $8 \times 4$  grid obtained from the fully resampling of the preceding  $4 \times 2$  grid. c) Final resistivity section obtained for a partly refined grid counting 80 blocks and derived from a partial resampling of the  $8 \times 4$  grid.

This agrees with the data obtained from two well-logs performed in 1958 and 400 m southward from the resistivity survey. The first drilling located 50 m westward of the fault indicates a 55 m-thick layer of very weathered shallow schist, and the second drilling located 150 m westward of the fault indicates a more reduced 25 m-thick layer of weathered schist. This shows a thickening of the weathered-schist layer as one approach the fault. Historical data indicate that the dioritic dike is very fractured with an important water circulation. The dike may then constitute an hydrological sink draining the water and explaining the cone-like geometry of the weathered-schist layer.

## 5. Conclusion

The multi-scale formulation of the conductivity inverse problem presented in this paper has been designed to account for both the multi-scale nature of the geological structures and of the ill-posedness of the inverse problem. In the

present study, this is done through a sequence of inversions with more and more detailed models containing smaller and smaller blocks with constant conductivity. This choice is non-unique and other multi-scale parameterization like wavelets could be used in accordance with some prior knowledge available concerning the conductivity distribution to be recovered (e.g. sharp or smooth edges, etc.). The adaptive multi-scaling is controlled by a prior sensitivity analysis which enables to detect the regions where a re-sampling, i.e. the splitting of coarse blocks into finer ones, is necessary with respect to the data at hand. To be correctly addressed, the sequential multi-scale inversion must be treated in a fully non-linear way in order to enable the rescaled models to escape from local maxima of the a posteriori probability distribution. Simulated annealing appears efficient in this respect, although other related non-linear methods like genetic algorithms could probably be equivalently used.

A synthetic example shows that the multi-scale formulation is able to automatically adapt itself to the multi-scale geometry of the structure to be recovered although the de-



cision test used in the present study consists in a simple threshold criteria. More sophisticated criteria should probably be designed in more complex situations. An application to real data obtained over the faulted structure of a mining area allows for an assessment of the method. On the overall, the multi-scale non-linear approach presented in this paper, although deserving further improvements and tests, already appears useful to produce optimally designed models according to the data available. This constitute a way to give a practical insight to the resolution achieved which, for the problem of electrical resistivity tomography, appears highly non-stationary.

**Acknowledgments.** We thank the members of the Galène association (<http://pont-pean.le-village.com/galene/>) for providing us with both geological and historical informations concerning the mining industry of Pont-Péan. Georges Ruelloux offered a kind and efficient assistance during the field operations.

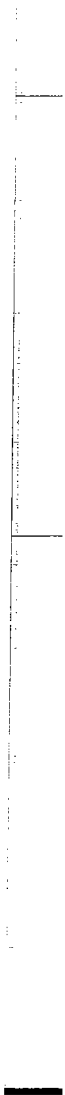
## References

- Akaike, H., Fitting autoregressive models for prediction, *Ann. Inst. Stat. Math.*, **21**, 261-265, 1965.
- Allers, A., and F. Santosa, Stability and resolution analysis of a linearized problem in electrical impedance tomography, *Inverse Problems*, **7**, 515-533, 1991.
- Asch, T., and H.F. Morrison, Mapping and monitoring electrical resistivity with surface and subsurface electrode arrays, *Geophysics*, **54**, 235-244, 1989.
- Berryman, J.G., and R.V. Kohn, Variational constraints for electrical-impedance tomography, *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 325-328, 1990.
- Bevc, D., H.F. Morrison, Borehole-to-surface electrical resistivity monitoring of a salt water injection experiment, *Geophysics*, **56**, 769-777, 1991.
- Borcea, L., J.G. Berryman, and G.C. Papanicolaou, Matching pursuit for imaging high-contrast conductivity, *Inverse Problems*, **15**, 811-849, 1999.
- Breckon, W.R., and M.K. Pidcock, Mathematical aspects of impedance imaging, *Clin. Phys. Physiol. Meas.*, **8**, 77-84, 1987.
- Cerny, V., A thermodynamic approach to the travelling salesman problem, *J. Optimization Theory Appl.*, **45**, 41-51, 1985.
- Cherkaeva, E., and A. Tripp, Inverse conductivity problem for noisy measurements, *Inverse Problems*, **12**, 869-883, 1996.
- Courboulès, F., J. Virieux, and D. Gibert, On the use of simulated annealing method and cross-validation theory for deconvolution of seismograms, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **86**, 1187-1193, 1996.
- Daily, W., and A. Ramirez, Electrical imaging of engineered hydraulic barriers, *Geophysics*, **65**, 83-94, 2000.
- Daily, W., A. Ramirez, D. LaBrecque, and J. Nitao, Electrical resistivity tomography of vadose water movement, *Water Resour. Res.*, **28**, 1429-1442, 1992.
- Dines, K., and R. Lytle, Analysis of electrical conductivity imaging, *Geophysics*, **46**, 1025-1036, 1981.
- Ellis, R.G., and D.W. Oldenburg, Applied geophysical inversion, *Geophys. J. Int.*, **116**, 5-11, 1994a.
- Ellis, R.G., and D.W. Oldenburg, The pole-pole 3-D DC-resistivity inverse problem : a conjugate gradient approach, *Geophys. J. Int.*, **119**, 187-194, 1994b.
- Gibert, D., and J. Virieux, Electromagnetic imaging and simulated annealing, *J. Geophys. Res.*, **96**, 8057-8067, 1991.
- Gibert, D., B. Tournier, and J. Virieux, Superresolution electromagnetic imaging of the conductive Earth's interior, *Inverse Problems*, **10**, 341-351, 1994.
- Hagrey, S.A., and J. Michaelson, Resistivity and percolation study of preferential flow in vadose zone at Bokhorst, Germany, *Geophysics*, **64**, 746-753, 1999.
- Holschneider, M., *Wavelets : An Analysis Tool*, 423 pp., Clarendon, Oxford, England, 1995.
- Kirkpatrick, S., C.D. Gelatt, and M.P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science*, **220**, 671-680, 1983.
- Kohn, R.V., and M. Vogelius, Determining the conductivity by boundary measurements, *Comm. Pure Appl. Math.*, **37**, 289-298, 1984.
- Li, Y., and D.W. Oldenburg, Approximate inverse mapping in DC resistivity problems, *Geophys. J. Int.*, **109**, 343-362, 1992.
- Li, Y., and D.W. Oldenburg, Inversion of 3-D DC resistivity data using an approximate inverse mapping, *Geophys. J. Int.*, **116**, 527-537, 1994.
- Madden, T., *The Resolving Power of Geoelectric Measurements for Delineating Resistive Zones Within the Crust*, **14**, 62-78, 1971.
- Mehrabi, A.R., and M. Sahimi, Coarsening of heterogeneous media : Application of wavelets, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 4385-4388, 1997.
- Menke, W., Applications of the POCS inversion method to interpolating topography and other geophysical fields, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 435-438, 1991.
- Menke, W., *Geophysical Data Analysis : Discrete Inverse Theory*, Academic Press, Orlando, Canada, 1984.
- Metropolis, N., A. Rosenbluth, N. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller, Equation of state calculations by fast computing machines, *J. Chem. Phys.*, **21**, 1087-1092, 1953.
- Moreau, F., D. Gibert, and G. Saracco, Filtering non-stationary geophysical data with orthogonal wavelets, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 407-410, 1996.
- Mosegaard, K., and A. Tarantola, Monte-Carlo sampling of solutions of inverse problems, *J. Geophys. Res.*, **100**, 12431-12447, 1995.
- Nowroozi, A.A., S.B. Horrocks, and P. Henderson, Saltwater intrusion into the freshwater aquifer in the eastern shore of Virginia : A reconnaissance electrical resistivity survey, *J. Appl. Geophys.*, **42**, 1-22, 1999.

## ANNEXE .

---

- Park, S., Fluid migration in the vadose zone from 3-D inversion of resistivity monitoring data, *Geophysics*, **63**, 41-51, 1998.
- Pelton, W.H., L. Rijo, and C.M. Swift, Inversion of two-dimensional resistivity and induced-polarization data, *Geophysics*, **43**, 788-803, 1978.
- Press, W.H., S.A. Teukolsky, W.K. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77*, 966 pp., Cambridge Univ. Press, New York, 1992.
- Ramirez, A., W. Daily, D. LaBrecque, E. Owen, and D. Chesnut, Monitoring an underground steam injection process using electrical resistance tomography, *Water Resour. Res.*, **29**, 73-87, 1993.
- Rissanen, J., Modeling by shortest data description, *Automatica*, **14**, 465-471, 1978.
- Snyder, D.D., A method for modeling the resistivity and IP responses of two-dimensional bodies, *Geophysics*, **41**, 997-1015, 1976.
- Spies, B.R., and R.G. Ellis, Cross-borehole resistivity tomography of a pilot-scale, in-situ vitrification test, *Geophysics*, **60**, 886-898, 1995.
- Tarantola, A., *Inverse Problem Theory*, Elsevier, New York, 1987.
- Tripp, A.C., G.W. Hohmann, and C.M. Swift, Two-dimensional resistivity inversion, *Geophysics*, **49**, 1708-1717, 1984.
- Van, G.P., S.K. Park, and P. Hamilton, Monitoring leaks from storage ponds using resistivity methods, *Geophysics*, **56**, 1267-1270, 1991.
- Van Laarhoven, P.J.M., and E.H.C. Aarts, *Simulated Annealing : Theory and Applications*, Reidel Publishing Company, 1987.
- Ward, S.H., Resistivity and induced polarization methods, in *Geotechnical and Environmental Geophysics*, 147-189, S.H. Ward ed., SEG, 1990.
- Yorkey, T.J., Electrical impedance tomography with piecewise polynomial conductivities, *J. Comput. Phys.*, **91**, 344-360, 1990.
- Zhdanov, M.S., and G.V. Keller, *The Geoelectrical Methods in Geophysical Exploration*, Elsevier, New York, 1994.





# Bibliographie

- Asch, T. and Morrison, F. (1989). Mapping and monitoring electrical resistivity with surface electrode arrays. *Geophysics*, 54(2) :235–244.
- Backus, G. and Gilbert, J. (1967). Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 13 :247–276.
- Benson, A., Payne, K., and Stubben, M. (1997). Mapping groundwater contamination using dc resistivity and VLF geophysical methods-A case study. *Geophysics*, 62 :80–86.
- Berryman, J. (1989). Fermat's principle and non-linear traveltime tomography. *Phys. Rev. Lett.*, 62(25) :2953–2956.
- Bevc, D. and Morrison, H. (1991). Borehole-to-surface electrical resistivity monitoring of a salt water injection experiment. *Geophysics*, 56(6) :769–777.
- Briggs, W. (1987). *A Multigrid Tutorial*. Pennsylvania.
- Chunduru, R., Sen, M., and Stoffa, P. (1996). 2-D resistivity inversion using spline parameterization and simulated annealing. *Geophysics*, 61 :151–161.
- Chunduru, R., Sen, M., and Stoffa, P. (1997). Hybrid optimization methods for geophysical inversion. *Geophysics*, 62(4) :1196–1207.
- Chunduru, R., Sen, M., Stoffa, P., and Nagendra, R. (1995). Nonlinear inversion of resistivity profiling data for some regular geometrical bodies. *Geophys. Prosp.*, 43 :979–1003.
- Constable, S., Parker, R., and Constable, C. (1987). Occam's inversion : A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52(3) :289–300.
- Corwin, R. (1990). The self-potential method for environmental and engineering applications. In Geotechnical and environmental geophysics, editors, S.H. Ward ed., pages 127–146. SEG.
- Courboux, F., Virieux, J., and Gilbert, D. (1996). On the use of simulated annealing method and cross-validation theory for deconvolution of seismograms. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 86 :1187–1193.
- Dabas, M., Tabbagh, A., and Tabbagh, J. (1994). 3-D inversion in subsurface electrical surveying-i. theory. *Geophys. J. Int.*, 119 :975–990.
- Daily, W. and Ramirez, A. (2000). Electrical imaging of engineered hydraulic barriers. *Geophysics*, 65(1) :83–94.

- Daily, W., Ramirez, A., LaBrecque, D., and Nitao, J. (1992). Electrical resistivity tomography of vadose water movement. *Water Resour. Res.*, 28(5) :1429–1442.
- Degroot-Hedlin, C. and Constable, S. (1990). Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data. *Geophysics*, 55(12) :1613–1624.
- Dey, A. and Morrison, H. (1979). Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures. *Geophysics*, 44(4) :753–780.
- Dosso, S. and Oldenburg, D. (1991). Magnetotelluric appraisal using simulated annealing. *Geophys. J. Intl.*, 106 :379–385.
- Ellis, R. and Oldenburg, D. (1994). The pole-pole 3-D dc-resistivity inverse problem : a conjugate gradient approach. *Geophys. J. Intl.*, 119 :187–194.
- Fitterman, D. and Corwin, R. (1982). Inversion of self-potential data from the cerro prieto geothermal field, Mexico. *Geophysics*, 47 :938–945.
- Gibert, D., Tournerie, B., and Virieux, J. (1994). Superresolution electromagnetic imaging of the conductive earth's interior. *Inverse Problems*, 10 :341–351.
- Gibert, D. and Virieux, J. (1991). Electromagnetic imaging and simulated annealing. *J. Geophys. Res.*, 96(B5) :8057–8067.
- Griffiths, D. and Barker, R. (1993). Two-dimensional resistivity mapping and modeling in areas of complex geology. 29 :211–226.
- Halgrey, S. and Michaelson, J. (1999). Resistivity and percolation study of preferential flow in vadose zone at Bokhorst, Germany. *Geophysics*, 64(3) :746–753.
- Jackson, D. and Matsushima, M. (1985). A Bayesian approach to nonlinear inversion. *J. Geophys. Res.*, 90 :581–591.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C., and Vecchi, M. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598) :671–680.
- Kohn, R. and MacKenney, A. (1990). Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography. *iv*, (6) :389–414.
- Laarhoven, P. V. and Aarts, E. (1987). *Simulated Annealing : Theory and Applications*. Mathematics and its applications.
- Lines, L. and Treitel, S. (1984). Tutorial : A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems. *Geophys. Prosp.*, (32) :159–186.
- Loke, M. and Barker, R. (1995). Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections. *Geophysics*, 60 :1682–1690.
- Loke, M. and Dahlin, T. (1998). Resolution of 2D Wenner resistivity imaging as assessed by numerical modeling. *J. Appl. Geophys.*, 38 :237–248.
- Madden, T. (1971). *The resolving power of geoelectric measurements for delineating resistive zones within the crust*, volume 14, chapter 12, pages 62–78. unknown.
- Madden, T. and Swift, C. (1969). Magnetotelluric studies of the electrical conductivity structure of the crust and upper mantle. In Hart, P., editor, *The earth's crust and upper mantle*, volume 13, pages 469–479. Am. geophys. Union.

- Marquardt, D. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11 :431–441.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, N., Teller, A., and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, 21 :1087–1092.
- Mirkin, G., Vasudevan, K., Cook, F., Laidlaw, W., and Wilson, W. (1993). A comparison of several cooling schedules for simulated annealing implemented on a residual statics problem. *Geophys. Res. Lett.*, 20(1) :77–80.
- Moreau, F., Gibert, D., Holschneider, M., and Saracco, G. (1997). Wavelet analysis of potential fields. *Inverse Problems*, 13 :165–178.
- Moreau, F., Gibert, D., Holschneider, M., and Saracco, G. (1999). Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform : Basic theory. *J. Geophys. Res.*, 104 :5003–5013.
- Morse, P. and Feshbach, H. (1953). *Methods of theoretical physics*. Inc., New York.
- Mosegaard, K. (1998). Resolution analysis of general inverse problems through inverse monte carlo sampling. *Inverse Problems*, 14 :405–426.
- Mosegaard, K. and Tarantola, A. (1995). Monte carlo sampling of solutions to inverse problems. *J. Geophys. Res.*, 100 :12431–12447.
- Mufti, I. (1976). Finite-difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysics*, 41(1) :62–78.
- Narayan, S., Duesseault, M., and Nobes, D. (1994). Inversion techniques applied to resistivity inverse problems. *Inverse Problems*, 10 :669–686.
- Nedler, J. and Mead, R. (1965). A simplex method for function minimization. *Computers Journal*, 7 :308–313.
- Nowroosi, A., Horrocks, S., and Henderson, P. (1999). Saltwater intrusion into the freshwater aquifer in the eastern shore of virginia : A reconnaissance electrical resistivity survey. *J. Appl. Geophys.*, 42 :1–22.
- Oldenburg, D. and Ellis, R. (1991). Inversion of geophysical data using an approximate inverse mapping. *Geophys. J. Int.*, 105 :325–353.
- Park, S. (1998). Fluid migration in the vadose zone from 3-D inversion of resistivity monitoring data. *Geophysics*, 63(1) :41–52.
- Parker, R. (1994). *Geophysical Inverse Theory*. Princeton University Press.
- Pelton, H., Rijo, L., and Swift, J. C. (1978). Inversion of two-dimensional resistivity and induced-polarization data. *Geophysics*, 48 :788–803.
- Prasad, S. (1999). An inversion of geomagnetic deep sounding data using simulated annealing. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 110 :129–135.
- Press, W. and Teukolsky, S. (1991). Simulated annealing optimization over continuous spaces. *Computers in Physics*, 5 :426–429.

- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., and Flannery, B. (1992). *Numerical Recipes in Fortran : the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New-York, 2nd edition.
- Ramirez, A., Daily, W., LaBrecque, D., Owen, E., and Chesnut, D. (1993). Monitoring an underground steam injection process using electrical resistance tomography. *wwr*, 29(1) :73–87.
- Robain, H., Albouy, Y., Dabas, M., Descloîtres, M., Camerlynck, C., Mechler, P., and Tabbagh, A. (1999). The location of infinite electrodes in pole-pole electrical surveys : consequences for 2d imaging. *J. Appl. Geophys.*, 41 :313–333.
- Saintenoy, A. (1998). *Radar géologique : acquisition de données multi-déports pour une mesure multi-paramètres*. PhD thesis, I.P.G.P., Université de Paris 7.
- Sasaki, Y. (1989). Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data. *Geophysics*, 54(2) :254–262.
- Sen, M., Bhattacharya, B., and Stoffa, P. (1993). Nonlinear inversion of resistivity sounding data. *Geophysics*, 58 :496–507.
- Sen, M. and Stoffa, P. (1991). Nonlinear one-dimensional seismic wave form inversion using simulated annealing. *Geophysics*, 56 :1624–1638.
- Shaley, E. (1993). Cubic B-Splines : Strategies of translating a simple structure to B-Spline parameterization. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 83 :1617–1627.
- Shima, H. (1990). Two-dimensional automatic resistivity inversion technique using alpha centers. *Geophysics*, 55 :682–684.
- Smith, N. and Vozoff, K. (1984). Two-dimensional dc resistivity inversion for dipole-dipole data. *IEEE, GE-22(1)* :21–28.
- Snieder, R. and Aldridge, D. (1995). Perturbation theory for travel times. *J. Acoust. Soc. Am.*, (98) :1565–1569.
- Snyder, D. (1976). A method for modeling the resistivity and ip responses of two-dimensional bodies. *Geophysics*, 41 :997–1015.
- Spies, B. and Ellis, R. (1995). Cross-borehole resistivity tomography of a pitot-scale, in-situ vitrification test. *Geophysics*, 60(3) :886–898.
- Stefanescu, S. (1987). On the utilization of negative centers in interpreting d.c. electrical prospecting. *Revue Roumaine de Géologie Géophysique et Géographie*, 31 :81–87.
- Swift, C. (1971). Theoretical magnetotelluric and turam response from two-dimensional inhomogeneities. *Geophysics*, 36 :38–52.
- Tarantola, A. (1987). *Inverse Problem Theory : Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*. Elsevier Science Publishers.
- Tong, L.-T. and Yang, C.-H. (1990). Incorporation of topography into two-dimensional resistivity inversion. *Geophysics*, 55(3) :354–361.
- Trampert, J. (1998). Global seismic tomography : the inverse problem and beyond. *Inverse Problems*, (14) :371–385.



- Tripp, A., Hohmann, G., and Swift, J. C. (1984). Two-dimensional resistivity inversion. *Geophysics*, 49 :1708–1717.
- Van, G., Park, S., and Hamilton, P. (1991). Monitoring leaks from storage ponds using resistivity methods. *Geophysics*, 56 :1267–1270.
- Ward, S. (1990). Resistivity and induced polarization methods. In Geotechnical and environmental geophysics, editors, *S.H. Ward ed.* SEG.
- Zhao, S. and Yedlin; M.J. (1996). Multidomain Chebyshev spectral method for 3-D dc resistivity modeling. *Geophysics*, 61 :1616–1623.
- Zhdanov, M. and Keller, G. (1994). *The Geoelectrical Methods in Geophysical Exploration*, volume 31 of *Methods in Geochemistry and Geophysics*. Elsevier Science B.V., Amsterdam.
- Zhody, A. (1989). A new method for the automatic interpretation of schlumberger and wenner sounding curves. *Geophysics*, 54(8) :245–253.



**MEMOIRES DE GEOSCIENCES RENNES**  
**Université de Rennes I - Campus de Beaulieu**  
**35042 - RENNES Cédex**  
**Tél : (33) 02-99-28-60-80 - Fax (33) 02-99-28-26-02**

**N° 1 - H. MARTIN** - Nature, origine et évolution d'un segment de croûte continentale archéenne : contraintes chimiques et isotopiques. Exemple de la Finlande orientale. 392 p., 183 fig., 51 tabl., 4 pl. (1985). **140 FF**

**N° 2 - G. QUERRE** - Palingénèse de la croûte continentale à l'Archéen : Les granitoïdes tardifs (2,5-2,4 Ga) de Finlande Orientale. Pétrologie et géochimie. 226 p., 74, fig., 41 tabl., 3 pl. (1985). **85 FF**

**N° 3 - J. DURAND** - Le Grès Armoricaïn. Sédimentologie. Traces fossiles. Milieux de dépôt. 150 p., 76 fig., 9, tabl., 19 pl. (1985). **55 FF**

**N° 4 - D. PRIOUR** - Genèse des zones de cisaillement : Application de la méthode des éléments finis à la simulation numérique de la déformation des roches. 157 p., 106 fig., 7 tabl. (1985). **55 FF**

**N° 5 - V. NGAKO** - Evolution métamorphique et structurale de la bordure sud-ouest de la "série de Poli", segment camerounais de la chaîne panafricaine. 185 p., 76 fig., 16, tabl., 12 pl. (1986). **70 FF**

**N° 6 - J. DE POULPIQUET** - Etude géophysique d'un marqueur magnétique situé sur la marge continentale sud-armoricaine. 159 p., 121 fig., 5 tabl. (1986). **55 FF**

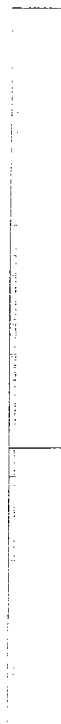
**N° 7 - P. BARBEY** - Signification géodynamique des domaines granulitiques. La ceinture des granulites de Laponie : une suture de collision continentale d'âge protérozoïque inférieur (1.9-2.4 Ga). 324 p., 89 fig., 46 tabl., 11 pl. (1986). **115 FF**

**N° 8 - Ph. DAVY** - Modélisation thermo-mécanique de la collision continentale. 233 p., 72 fig., 2 tabl. (1986). **95 FF**

**N° 9 - Y. GEORGET** - Nature et origine des granites peralumineux à cordiérite et des roches associées. Exemple des granitoïdes du Massif Armoricaïn (France) : Pétrologie et géochimie. 250 p., 140 fig., 67 tabl. (1986). **Epuisé**

**N° 10 - D. MARQUER** - Transfert de matière et déformation progressive des granitoïdes. Exemple des massifs de l'Aar et du Gothard (Alpes Centrales Suisses). 287 p., 134 fig., 52 tabl., 5 cartes hors-texte (1987). **Epuisé**

**N° 11 - J.S. SALIS** - Variation séculaire du champ magnétique terrestre. Direction et Paléointensité sur la période 7.000-70.000 BP dans la Chaîne des Puys. 190 p., 73 fig., 28 tabl., 1 carte hors-texte (1987). **90 FF**



**N° 12 - Y. GERARD** - Etude expérimentale des interactions entre déformation et transformation de phase. Exemple de la transition calcite-aragonite. 126 p., 42 fig., 3 tabl., 10 pl. (1987). **75 FF**

**N° 13 - H. TATTEVIN** - Déformation et transformation de phases induites par ondes de choc dans les silicates. Caractérisation par la microscopie électronique en transmission. 150 p., 50 fig., I tabl., 13 pl. (1987). **95 FF**

**N° 14 - J.L. PAQUETTE** - Comportement des systèmes isotopiques U-Pb et Sm-Nd dans le métamorphisme éclogitique. Chaîne hercynienne et chaîne alpine. 190 p., 88 fig., 39 tab., 2 pl. (1987). **95 FF**

**N° 15 - B. VENDEVILLE** - Champs de failles et tectonique en extension; modélisation expérimentale. 392 p., 181 fig., I, tabl., 82 pl. (1987). **265 FF**

**N° 16 - E. TAILLEBOIS** - Cadre géologique des indices sulfurés à Zn, Pb, Cu, Fe du secteur de Gouézec-St-Thois : Dévonno-Carbonifère du flanc Sud du Bassin de Châteaulin (Finistère). 195 p., 64 fig., 41 tabl., 8 pl. photo., 8 pl. h.texte. (1987). **110 FF**

**N° 17 - J.P. COGNE** - Contribution à l'étude paléomagnétique des roches déformées. 204 p., 86 fig., 17 tabl. (1987). **90 FF**

**N° 18 - E. DENIS** - Les sédiments briovériens (Protérozoïque supérieur) de Bretagne septentrionale et occidentale : Nature, mise en place et évolution. 263 p., 148 fig., 26 tab., 8 pl. (1988). **140 FF**

**N° 19 - M. BALLEVRE** - Collision continentale et chemins P-T : l'Unité pennique du Grand Paradis (Alpes Occidentales). 340 p., 146 fig., 10 tabl., (1988). **Epuisé**

**N° 20 - J.P. GRATIER** - L'équilibrage des coupes géologiques. Buts, méthodes et applications. Atelier du Groupe d'Etudes Tectoniques le 8 Avril 1987 à Rennes. 165 p., 82 fig., 2 tabl. (1988). **85 FF**

**N° 21 - R.P. MENOT** - Magmatismes paléozoïques et structuration carbonifère du Massif de Belledonne (Alpes Françaises). Contraintes nouvelles pour les schémas d'évolution de la chaîne varisque ouest-européenne. 465 p., 101 fig., 31 tab., 6 pl., (1988). **Epuisé**

**N° 22 - S. BLAIS** - Les ceintures de roches vertes archéennes de Finlande Orientale : Géologie, pétrologie, géochimie et évolution géodynamique. 312 p., 107 fig., 98, tab., 11 pl. photo, 1 pl. h.texte, (1989). **160 FF**

**N° 23 - A. CHAUVIN** - Intensité du champ magnétique terrestre en période stable de transition, enregistrée par des séquences de coulées volcaniques du Quaternaire. 217 p., 100 fig., 13 tab. (1989). **100 FF**



- N° 24 - J.P. VUICHARD** - La marge austroalpine durant la collision alpine; évolution tectonométamorphique de la zone de Sesia-Lanzo. 307 p., 143 fig., 26 tab., 6 pl. hors-texte. (1989). **170 FF**
- N° 25 - C. GUERROT** - Archéen et Protérozoïque dans la chaîne hercynienne ouest-européenne : géochimie isotopique (Sr-Nd-Pb) et géochronologie U-Pb sur zircons. 180 p., 68 fig., 29 tab., I pl. (1989). **90 FF**
- N° 26 - J.L. LAGARDE** - Granites tardi-carbonifères et déformation crustale. L'exemple de la Méseta marocaine. 353 p., 244 fig., 15pl. (1989). **210 FF**
- N° 27 - Ph. BARDY** - L'orogène cadomien dans le Nord-Est du Massif Armoricain et en Manche Occidentale. Etude tectonométamorphique et géophysique. 395 p., 142 fig., 7 tab., I pl. hors-texte. (1989). **175 FF**
- N° 28 - D. GAPAIS** - Les Orthogneiss : Structures, mécanismes de déformation et analyse cinématique. 377 p., 184 fig., 3 tab. (1989). **275 FF**
- N° 29 - E. LE GOFF** - Conditions pression-température de la déformation dans les orthogneiss : Modèle thermodynamique et exemples naturels. 321 p., 146 fig., 42 tab. (1989). **150 FF**
- N° 30 - D. KHATTACH** - Paléomagnétisme de formations paléozoïques du Maroc. 220 p., 97 fig., 35 tab., (1989). **100 FF**
- N° 31 - A. HAIDER** - Géologie de la formation ferrifère précambrienne et du complexe granulitique encaissant de Buur (Sud de la Somalie). Implications sur l'évolution crustale du socle de Buur. 215 p., 18 fig., 42 tab., 7 pl. (1989). **130 FF**
- N° 32 - T. DANIEL** - Traitement numérique d'image appliqué à l'analyse texturale de roches déformées. 186 p., 121 fig., 4 tab. (1989). **210 FF**
- N° 33 - C. LECUYER** - Hydrothermalisme fossile dans une paléocroûte océanique associée à un centre d'expansion lent : Le complexe ophiolitique de Trinity (N. Californie, U.S.A). 342 p., 109 fig., 73 tab. (1989). **200 FF**
- N° 34 - P. RICHARD** - Champs de failles au dessus d'un décrochement de socle: modélisation expérimentale. 382 p., 137 fig. (1989). **400 FF**
- N° 35 - J. de BREMOND d'ARS** - Estimation des propriétés rhéologiques des magmas par l'étude des instabilités gravitaires. Pétrologie du complexe plutonique lité de Guernesey. 370 p., 128 fig., 64 tabl. (1989). **180 FF**
- N° 36 - A. LE CLEACH** - Contribution à l'étude des propriétés physiques des minéraux à haute pression : Spectroscopie et calcul des grandeursthermodynamiques de la lawsonite, des épidotes et des polymorphes de SiO<sub>2</sub>. 190 p., 72 fig., 37 tabl. (1989). **100 FF**





**N° 37 - O. MERLE** - Cinématique des nappes superficielles et profondes dans une chaîne de collision. 280 p., 165 fig., 3 tabl. (1990). **160 FF**

**N° 38 - P. ALLEMAND** - Approche expérimentale de la mécanique du rifting continental. 205 p., 106 fig., 13 tabl. (1990). **160 FF**

**N° 39 - Ch. BASILE** - Analyse structurale et modélisation analogique d'une marge transformante : l'exemple de la marge de Côte-d'Ivoire - Ghana. 230 p., 161 fig., 7 tabl. (1990) . **Epuisé**

**N° 40 - M. AUDIBERT** - Déformation discontinue et rotations de blocs. Méthodes numériques de restauration. Application à la Galilée. 250 p., 80 fig., 5 tabl., (1991). **150 FF**

**N° 41 - G. RUFFET** - Paléomagnétisme et  $40\text{Ar}/39\text{Ar}$  : étude combinée sur des intrusions précambriennes et paléozoïques du Trégor (Massif Armoricaïn). 261 p., 80 fig., 19 tabl. (1991). **120 FF**

**N° 42 - P. SUZANNE** - Extrusion latérale de l'Anatolie : Géométrie et mécanisme de la fracturation. 262 p., 100 fig., 12 pl., 5 tabl. (1991). **210 FF**

**N° 43 - G. FIQUET** - Propriétés thermodynamiques de minéraux du manteau supérieur. Calorimétrie à haute température et spectroscopie Raman à haute pression et haute température. 274 p., 101 fig., 53 tabl. (1991). **130 FF**

**N° 44 - J. MARTINOD** - Instabilités périodiques de la lithosphère (Flambage, Boudinage en compression et en extension). 283 p., 117 fig., 3 tabl., 2 pl. couleur. (1991). **170 FF**

**N° 45 - M.O. BESLIER** - Formation des marges passives et remontée du manteau: Modélisation expérimentale et exemple de la marge de la Galice. 257 p., 86 fig., 5 tab., 2 pl. noir/blanc, 2 Pl. couleur. (1991). **180 FF**

**N° 46 - J.B.L. FRANCOLIN** - Analyse structurale du Bassin du Rio Do Peixe. (Brésil). 250 p., 83 fig., 3 tab., 9 pl. couleur. (1992). **300 FF**

**N° 47 - S. TOURPIN** - Perte des mémoires isotopiques (Nd, Sr, O) et géochimiques (REE) primaires des komatiites au cours du métamorphisme : exemple de la Finlande Orientale. 85 p., 53 fig., 23 tabl. (1992). **100 FF**

**N° 48 - J.A. BARRAT** - Genèse des magmas associés à l'ouverture d'un domaine océanique : Géochimie des laves du Nord-Est de l'Afrique (Mer Rouge - Afar) et d'Arabie. 175 p., 47 fig., 23 tab. (1992). **100 FF**

**N° 49 - E. HALLOT** - Injection dans les réservoirs magmatiques. Contraintes pétrologiques (Massifs de Fort La Latte et de Saint Brieuc, Bretagne Nord) et modélisation analogique. 331 p., 101 fig., 30 tabl. (1993). **180 FF**



**N° 50 - T. SOURIOT** - Cinématique de l'extension post-pliocène en Afar. Imagerie SPOT et modélisation analogique. 225 p., 2 pl. coul., I tabl., 91 fig., 16 pl. photo., I carte H.Texte. (1993). **190 FF**

**N° 51 - T. EUZEN** - Pétrogenèse des granites de collision post-épaississement. Le cas des granites crustaux et mantelliques du Complexe de Pontivy-Rostrenen (Massif Armoricaïn, France). 350 p., 2 pl. coul., 34 tabl. en annexe, (1993). **190 FF**

**N° 52 - J. LE GALL** - Reconstitution des dynamismes éruptifs d'une province paléovolcanique : l'exemple du graben cambrien du Maine (Est du Massif Armoricaïn). Pétrogenèse des magmas andésitiques et ignimbricitiques et leur signification dans l'évolution géodynamique cadomienne. 370 p., 30pl. photo., I pl. coul. (1993). **350 FF**

**N° 53 - J. C. THOMAS** - Cinématique tertiaire et rotations de blocs dans l'ouest de l'Asie Centrale (Tien Shan Kirghiz et dépression Tadjik). Etude structurale et paléomagnétique. 330 p., 107 fig., 2 pl. coul., 18 tabl., 1 carte, annexes. (1993). **220 FF**

**N° 54 - F. LAFONT** - Influences relatives de la subsidence et de l'eustatisme sur la localisation et la géométrie des réservoirs d'un système deltaïque. Exemple de l'Eocène du bassin de Jaca, Pyrénées Orientales. 270 p., 115 fig., dont 17 pl. couleur. (1994). **150 FF**

**N° 55 - C. BIELLMANN** - Stabilité et réactivité des carbonates à très hautes pression et température. Implications pour le stockage du Carbone dans le manteau terrestre. 230 p., 74 fig., 11 tabl., 1 pl. couleur (1993). **175 FF**

**N° 56 - A. POTREL** - Evolution tectono-métamorphique d'un segment de croûte continentale archéenne. Exemple de l'Amsaga (R.I. Mauritanie), dorsale Réguibat (Craton Ouest Africain). 400 p., (dont annexes) 125 fig., 21 tabl., 1 pl. couleur, 43 pl. photo (1994). **270 FF**

**N° 57 - M. KUNTZ** - Approche expérimentale de la déformation dans les systèmes préfracturés : Contribution à l'étude de l'inversion tectonique des bassins sédimentaires. 220 p., 19 pl., 87 fig., 3 tabl. (1994). **155 FF**

**N° 58 - D. ROUBY** - Restauration en carte des domaines faillés en extension. Méthode et applications. 266 p., 98 fig. dont annexes (1994). **180 FF**

**N° 59 - J.J. TONDJI-BIYO** - Chevauchements et bassins compressifs. Influence de l'érosion et de la sédimentation. Modélisation analogique et exemples naturels. 426 p., 141, fig., 4 pl. couleur, 21 tableaux, dont annexes (1995). **270 FF**

**N° 60 - H. BOUHALLIER** - Evolution structurale et métamorphique de la croûte continentale archéenne (Craton de Dharwar, Inde du Sud). 277 p., 100 fig., dont 5 pl. coul., 7 tab., dont annexes (1995). **150 FF**



**N° 61 - P. GAUTIER** - Géométrie crustale et cinématique de l'extension tardi-orogénique dans la domaine centre-égéen îles des Cyclades et d'Eubée, Grèce). 430 p., 89 fig., dont 4 pl. coul., 1 tabl., dont annexes (1995). **220 FF**

**N° 62 - M.T. ROMAN BERDIEL** - Mécanismes d'intrusion des granites supracrustaux. Modèles analogiques et exemples naturels. 270 p., 75 fig., 5 pl. laser, 9 tabl. (1995). **160 FF**

**N° 63 - M. JULLIEN** - Polytypisme, ordre d'empilement et interstratification dans la cookéite et les phyllosilicates non micacés du métamorphisme. Influence de la pression. 226 p., 61 fig., 8 tabl. (1995). **150 FF**

**N° 64 - Y. LAHAYE** - L'altération des komatiites. 224 p., 70 fig., 29 tabl., + annexes (1995). **150 FF**

**N° 65 - A. CRAVE** - Quantification de l'Organisation des réseaux hydrographiques. 210 p., 68 fig., dont annexe (1995). **épuisé**

**N° 66 - A. ESSAIFI** - Relations entre magmatisme-déformation et altération hydrothermale : L'exemple des Jebilet centrales (Hercynien, Maroc). 331 p., 248 fig., 4 tabl., dont annexes (1995). **170 FF**

**N° 67 - M. LE RAVALEC** - Vitesses et perméabilité des roches : modélisation du rôle des fluides et des fissures. 276 p., 119 fig. 3 pl. couleur, 5 tabl., dont annexe (1996). **140 FF**

**N° 68 - A. SEMIANI** - Métallogénie de la zone de cisaillement aurifère est-ouzzalienne : structure, pétrologie et géochimie des gisements d'or de Tirek-Amesmesssa (Hoggar occidental, Algérie). 262 p., 72 fig., 36 tabl., 4 pl. couleur + annexes, (1996). **130 FF**

**N° 69 - F. MOREAU** - Méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes. 177 p., 57 fig., + annexes. (1996). **100 FF**

**N° 70 - B. TOURNERIE** - Imagerie de réflecteurs électromagnétiques en régime diffusif : Méthode et applications en Géophysique. 165 p., 45 fig., 8 tabl., + annexes, (1996). **100 FF**

**N° 71 - T. NALPAS** - Inversion des grabens du Sud de la Mer du Nord. Données de sub-surface et modélisation analogique. 245 p., 110 fig., dont 10 pl. coul., (1996). **120 FF**

**N° 72 - M. URREIZTIETA** - Tectonique néogène et bassins transpressifs en bordure méridionale de l'Altiplano-Puna (27°S), Nord-Ouest argentin. 311 p., 111 fig., 5 tabl., 6 pl. couleur, dont annexe. (1996). **200 FF**



**N° 73 - A.N. KOUAMELAN** - Géochronologie et Géochimie des Formations Archéennes et Protérozoïques de la Dorsale de Man en Côte d'Ivoire. Implications pour la Transition Archéen-Protérozoïque. 290 p., 99 fig., 23 tabl., 2 pl. couleur, dont annexe (1996). **120 FF**

**N° 74 - Y. GARCIA** - Variation de l'intensité du champ magnétique en France durant les deux derniers millénaires. 331 p., 122 fig., 35 tab., dont annexe. (1996). **150 FF**

**N° 75 - M. A. SANTOS PINTO** - Le recyclage de la croûte continentale archéenne : Exemple du bloc du Gavião- Bahia, Brésil. 193 p., 102 fig., 51 tab. (1996). **100 FF**

**N° 76 - D. CHARDON** - Les déformations continentales archéennes : Exemples naturels et modélisation thermomécanique. 300 p., 127 fig., 6 tabl., 4 pl. photo; dont annexes. (1997). **130 FF**

**N° 77 - C. ROBIN** - Mesure stratigraphique de la déformation : Application à l'évolution jurassique du Bassin de Paris. 293 p., 129 fig., 9 pl. couleur, dont annexes. (1997). **180 FF**

**N° 78 - D. GRANJEON** - Modélisation stratigraphique déterministe : Conception et applications d'un modèle diffusif 3D multilithologique. 197 p., 56 fig., 22 tabl., 8 pl. couleur. (1997). **100 FF**

**Hors Série N°1 - P. DAVY, F. GUILLOCHEAU, B. HAMELIN** (Coordinateurs) - Géomorphologie : Processus et modélisation. Ecole thématique du CNRS, 146 p., 69 fig., 2 tab., Lumigny, Juillet (1997) . **50 FF**

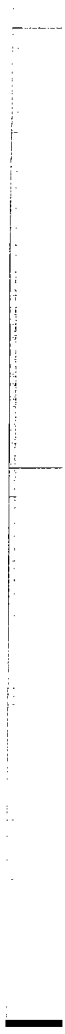
**N° 79 - A. JAFFREZIC** - Géochimie des éléments métalliques, des nitrates et du carbone organique dissous dans les eaux et les sols hydromorphes. Agriculture intensive et qualité des eaux dans les zones humides en Bretagne. 296 p., 143 fig., 46 tabl., 1 pl. coul., dont annexes (1997). **130 FF**

**N° 80 - O. BOUR** - Transferts de fluides dans les milieux fracturés : Effets d'échelle. 272 p., 100 fig., 1 tabl., (1997). **100 FF**

**N° 81 - E. BONNET** - La localisation de la déformation dans les milieux fragile-ductile : Approche expérimentale et application à la lithosphère continentale. 183 p., 85 fig., 4 tabl., (1997). **85 FF**

**N° 82 - S. GESSA** - Le genre *Nowakia* (Dacryoconarides) dans le Praguien de la République Tchèque : Biométrie, systématique, phylogénie, paléoenvironnements. 256 p., 132 fig., 8 pl., + annexes. (1997). **125 FF**

**N° 83 - T. MAUDUIT** - Déformation gravitaire synsédimentaire sur une marge passive : modélisation analogique et application au Golfe de Guinée. 260 p., 96 fig., dont 12 pl. coul., (1998). **100 FF**





**N° 84 - G. QUEREL** - Cristallochimie des éléments traces dans les phases du manteau terrestre : applications de la spectroscopie de luminescence à haute pression et haute température. 241 p., 101 fig., 23 tabl., (1998). **95 FF**

**N° 85 - M. DIRAISON** - Evolution cénozoïque du Bassin de Magellan et tectonique des Andes australes. 333 p., 119 fig., dont 6 pl. coul., 2 pl. hors-texte, 7 tabl., (1998). **130 FF**

**N° 86 - S. BONNET** - Tectonique et dynamique du relief : le socle armoricain au Pléistocène. 352 p., 144 fig., dont 7pl. coul., +1 pl. coul. et 3 transparents en annexe, (1998). **115 FF**

**N° 87 - F. TOUCHARD** - Caractérisation hydrogéologique d'un aquifère en socle fracturé : site de Ploëmeur (Morbihan). 271 p., 103 fig., dont 5 coul., 37 tabl., annexe. (1999). **115 FF**

**N°88 - T.V. LE** - Stratigraphie sismique et modélisation stratigraphique : application à l'évolution tectonique oligo-miocène du Bassin du Fleuve Rouge (Vietnam). 229 p., 131 fig., dont 16 pl. coul. + annexes (1999). **110 FF**

**N° 89 - V. CHAVAGNAC** - Behaviour of the Sm-Nd isotopic system during metamorphism : examples from the HT-LP metamorphic terrane of the Limpopo Belt, South Africa and the UHP metamorphic terrane of Dabieshan, Central China. 405 p., 126 fig., 47 tabl. (1999). **150 FF**

**N°90 - J. MOLENAT** - Rôle de la nappe sur les transferts d'eau de nitrate dans un bassin versant agricole. Etude expérimentale et modélisation. 272 p., 87 fig., 19 tabl., 3 pl. couleur. (1999). **100 FF**

**N° 91 - C. RIOU** - Géochimie des terres rares et des éléments traces associés dans les nappes et l'eau des sols hydromorphes : Application au traçage hydrologique. 293 p., 74 fig., 17 tabl., + annexes. (1999) **100 FF**

**N° 92 - I. COUTAND** - Tectonique Cénozoïque du Haut Plateau de la Puna, Nord Ouest Argentin, Andes Centrales. 381 p., 125 fig., 10 tabl., 6 pl. coul., 1 pl. hors-texte + annexes. (1999) **150 FF**

**N° 93 - F. DARBOUX** - Modélisations numérique et expérimentale du ruissellement. Effet de la rugosité sur les distances de transfert. 170 pages., 56 fig., 4 tabl. (1999). **80 FF**

**N° 94 - J.R. De DREUZY** - Analyse des propriétés hydrauliques des réseaux de fractures. Discussion des modèles d'écoulement compatibles avec les principales propriétés géométriques. 217 pages, 118 fig., 9 tabl., (2000). **90FF**

**Hors-Série n°2 - G. BADARCH & B.M. JAHN** - IGCP-420 Continental Growth in the Phanerozoic : Evidence from Central Asia. Second Workshop. Abstracts and Excursion Guidebook. (Geotraverse through a terrane collage in Southern Khangay). July 25 - August 3, 1999, Ulaanbaatar, Mongolia. 190 pages. (2000). **65FF**



**N° 96 - Olivier BOURGEOIS** - Processus d'extension lithosphérique en Islande. Interactions avec les calottes glaciaires quaternaires. 280 pages, 95 fig., dont 2 planches couleur, 2 tabl. (2000). **80 FF**

**N° 97 - Sidonie REVILLON** – Origine et composition du Plateau Océanique Caraïbe. 358 pages, 77 fig., 24 tabl. (2000). **120 FF**

**Hors-Série n° 3 - Jean-Pierre BRUN & Marie-Anne OLLIVIER** – 150 ans de Géologie à Rennes. 105 p., 13 pl. coul. (2000). **70 FF**

**N° 98 - Marc PESSEL** - Tomographie électrique : Développements méthodologiques et applications. 129 pages, 59 fig, dont 7 planches couleur, 1 tab. (2001). **75 FF**



**CAHIERS TECHNIQUES DE GEOSCIENCES RENNES**

**Université de Rennes I - Campus de Beaulieu**

**35042 - RENNES Cédex**

**Tél : (33) 02 99 28 14 75 - Fax (33) 02 99 28 61 00**

**N° 1 – M. BOUHNİK-LE COZ, P. PETITJEAN, E. SERRAT et G. GRUAU - Validation d'un protocole permettant le dosage simultané des cations majeurs et traces dans les eaux douces naturelles par ICP-MS. 84 p. (2001). 50 FF**



## POUR PASSER COMMANDE

Collection des <b>MEMOIRES</b>	Collection des <b>CAHIERS TECHNIQUES</b>
<p>S'adresser à :  <b>Arlette FALAISE</b>  Géosciences Rennes  Université de rennes 1  F-35042 Rennes cedex</p> <p>Tel : 02 99 28 60 80  Fax : 02 99 28 26 02  mail : arlette.falaise@univ-rennes1.fr</p>	<p>S'adresser à :  <b>Marie-Paule BERTRAND</b>  Géosciences Rennes  Université de rennes 1  F-35042 Rennes cedex</p> <p>Tel : 02 99 28 14 75  Fax : 02 99 28 61 00  mail : marie-paule.bertrand@univ-rennes1.fr</p>
<p>Votre commande doit être accompagnée, soit :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- de votre bon de commande</li> <li>- ou bien de votre règlement par chèque à l'ordre de : <i>Agent comptable du CNRS</i></li> </ul>	

## BON DE COMMANDE

<b>NOM</b>	
<b>ORGANISME</b>	
<b>ADRESSE</b>	

Veuillez me faire parvenir les ouvrages suivants (cocher la collection concernée):

- ☐ dans la collection des Mémoires  
☐ dans la collection des Cahiers techniques

N°	Auteur - Titre	Nombre d'ex	Prix unitaire	Total 1
Frais de port : 20,00 F le volume 5,00 par volume supplémentaire			<b>Total 2</b>	
<b>TOTAL DE LA COMMANDE</b>			<b>Total 1 + Total 2</b>	





**Imprimé à l'Université de Rennes I**

**Dépôt Légal**

**2ème Trimestre 2001**

## Résumé

La tomographie électrique est une méthode géophysique permettant d'obtenir la répartition de la conductivité des roches à partir de mesures de potentiel électrique. Une large partie de cette thèse est constituée d'un développement méthodologique concernant l'interprétation des données électriques. L'interprétation des données se décompose en deux problèmes : le problème direct et le problème inverse. Le problème direct permet d'obtenir le champ de potentiel électrique en fonction de la distribution de conductivité. Il permet donc de tester les modèles de conductivité fournis par le problème inverse qui explorent l'espace des solutions afin de converger vers le meilleur modèle.

Le problème direct est résolu numériquement via une méthode multigrille qui permet de résoudre rapidement de larges systèmes linéaires. Une paramétrisation multi-échelle et adaptative est utilisée pour la résolution du problème inverse. Cette paramétrisation évolue pendant le processus d'inversion afin d'aboutir à une paramétrisation optimale. Ceci rend le problème fortement non-linéaire et donc seules des méthodes inverses pleinement non-linéaires comme le recuit simulé sont envisageables. Le couplage du recuit simulé et de la descente du simplexe permet d'obtenir une méthode inverse hybride. Les tests synthétiques ont permis de montrer l'intérêt d'une paramétrisation multi-échelle adaptative. Effectivement lorsque cette paramétrisation devient optimale pour le modèle considéré, la décroissance de la fonction coût est relativement brutale, l'inversion converge alors rapidement vers le meilleur modèle.

L'interprétation de données électriques réelles a été réalisée sur un terrain relativement simple et bien documenté. La distribution de résistivité obtenue a été comparée avec les résultats d'une analyse en ondelettes continue et des données de carottage. On a alors abouti à une bonne cohérence entre les différentes sources d'informations, permettant de valider la méthode inverse.

### Mots clés :

Tomographie électrique, problèmes, inverse, Pont-Péan, faille multigrille, recuit simulé.